11 класс

11.1. Можно ли из всех прямоугольников размерами 1×1, 1×3, 1×5, ..., 1×2019, взятых по одному разу, сложить прямоугольник, каждая сторона которого больше 1?

Ответ: можно.

Решение. Заметим, что дано 1010 прямоугольников, то есть их количество чётно. Разобьем прямоугольники на пары так, чтобы для их больших сторон выполнялись равенства: 1 + 2019 = 3 + 2017 = 5 + 2015 = … = 1009 + 1011. Приложив прямоугольники в каждой паре меньшими сторонами, получим 505 прямоугольников размером 1×2020. Приложив их последовательно сторонами 2020, получим прямоугольник размером 505×2020.

Размеры полученного прямоугольника указывать не обязательно.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведён верный способ складывания прямоугольников, но допущена вычислительная ошибка при подсчёте размера полученного прямоугольника*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

11.2. В треугольной пирамиде *SABC* боковое ребро *SA* перпендикулярно основанию *ABC*. Известно, что биссектрисы плоских углов *BAC* и *BSC* пересекаются. Докажите, что углы *ABC* и *ACB* равны.

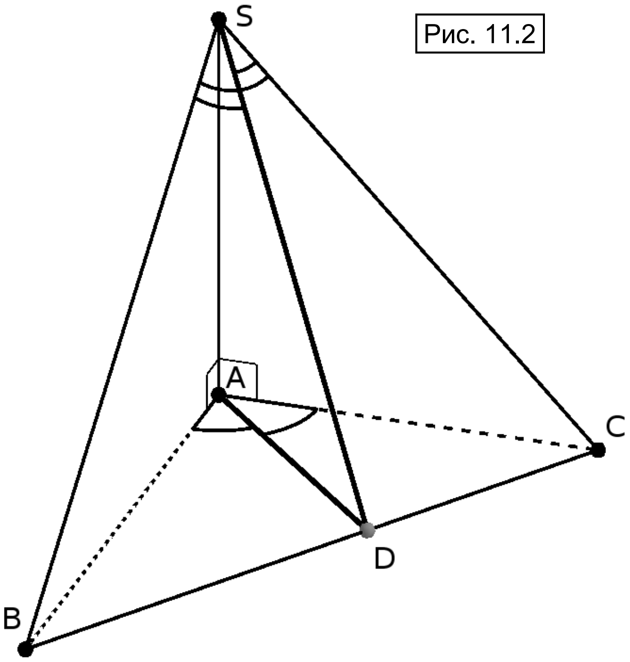


Рис. 11.2

Решение. Биссектрисы плоских углов *BAC* и *BSC* пересекаются в точке *D*, лежащей на ребре *BC* (см. рис. 11.2).

По свойству биссектрисы треугольника: *BD* : *DC* = *AB* : *AC* и *BD* : *DC* = *SB* : *SC*. Следовательно, *AB* : *AC* = *SB* : *SC*. Перепишем эту пропорцию в виде *AB* : *SB* = *AC* : *SC*. Тогда в прямоугольных треугольниках *SAB* и *SAC* равны косинусы острых углов *ABS* и *ACS*, значит, равны и сами углы. Тогда равны прямоугольные треугольники *ABS* и *ACS* (по катету и острому углу), откуда *AB* = *AC*. Следовательно, $\angle ABC = \angle ACB$.

Получив пропорцию AB : AC = SB : SC, искомое равенство углов можно также получить из равенства треугольников SAB и SAC.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

11.3. Решите уравнение: $|\sin x - \sin y| + \sin x \cdot \sin y = 0$.

Ответ: $x = \pi k$, $k \in Z$; $y = \pi n$, $n \in Z$.

Решение. Если $\sin x = 0$, то и $\sin y = 0$, и наоборот, если $\sin y = 0$, то и $\sin x = 0$. Следовательно, $x = \pi k$, $k \in Z$; $y = \pi n$, $n \in Z$. Докажем, что других решений нет.

Первый способ. Пусть $\sin x \neq 0$ и $\sin y \neq 0$. Тогда данное уравнение может иметь решения, если $\sin x \sin y < 0$.

Пусть $\sin x > 0$, $\sin y < 0$, тогда уравнение примет вид: $\sin x - \sin y + \sin x \sin y = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin x + \sin y - \sin x \sin y = 1 \Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 + \sin y) = 1$. В рассматриваемом случае $0 < \sin x \leq 1$ и $-1 \leq \sin y < 0$, поэтому равенство невозможно.

Рассматривая случай $\sin x < 0$, $\sin y > 0$, получим уравнение $(1 + \sin x)(1 - \sin y) = 1$, которое не имеет решение по аналогичным причинам.

Можно также иначе преобразовывать уравнение для каждого из случаев, когда sinxsiny < 0. Например, если sinx > 0, siny < 0, то уравнение можно записать в таком виде: sinx(1 + siny) = siny. Если siny = –1, то равенство не выполняется. При siny ≠ –1 получим: $\sin x = \dfrac{\sin y}{1+\sin y}$*. Это равенство также не может выполняться, так как его левая часть положительна, а правая – отрицательна. Случай sinx < 0, siny > 0 рассматривается аналогично.*

Второй способ. Уравнение симметрично относительно sin*x* и sin*y*, поэтому без потери общности можно считать, что sin*x* ≥ sin*y*. Тогда sin*x* – sin*y* + sin*x*sin*y* = 0. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведённым выше.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

«∓» *Приведён только верный ответ*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

11.4. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить на доске размером 8×9 так, чтобы среди любых пяти подряд идущих клеток по горизонтали, вертикали или диагонали была отмеченная клетка?

Рис. 11.4а

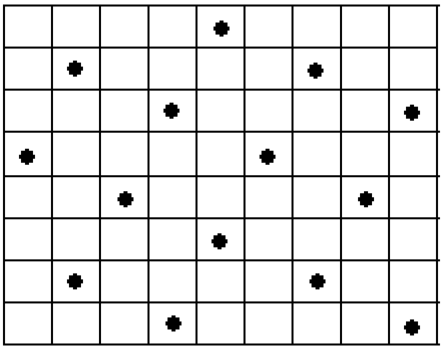
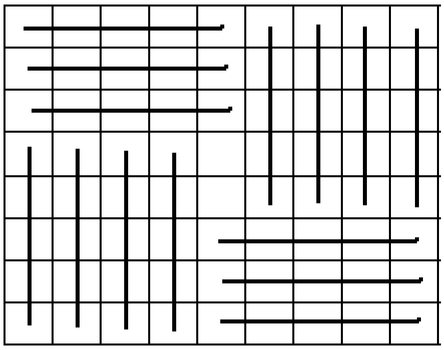


Рис. 11.4б



Ответ: 14 клеток.

Решение. Пример. См. рис. 11.4а.

Оценка. Выделим на доске 14 прямоугольников размером 1×5, не затрагивающие только две центральные клетки (см. рис. 11.4б). В каждом из них должно быть хотя бы по одной отмеченной клетке, то есть отмеченных клеток не меньше, чем 14 .

Проверяющим рекомендуется очень внимательно проверять пример, особенно все диагонали.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«∓» *Приведёны верный ответ и верная оценка, но пример отсутствует или неверен*

«∓» *Приведёны верный ответ и верный пример, но оценка отсутствует или неверна*

«–» *Приведён только ответ*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

11.5. При каких натуральных *n* существуют натуральные *a* и *b* такие, что $n! = 2^a + 2^b$?

Ответ: при *n* = 3 или *n* = 4.

Решение. Рассмотрим остатки от деления степеней двойки на 7: 1, 2 и 4. Значит, сумма двух степеней двойки не может давать остаток 0 при делении на 7, поэтому левая часть равенства не делится на 7. Следовательно, *n*! не делится на 7, то есть *n* < 7.

Далее осуществляем перебор для значений n от 1 до 6. Очевидно, что *n* ≠ 1 и *n* ≠ 2. Для *n* = 3 *a* = 2; *b* = 1. Для *n* = 4 *a* = 4; *b* = 3. Для *n* = 5 или *n* = 6 одна из степеней двойки должна быть хотя бы половиной от общей суммы, но в этом случае подходящих вариантов не будет. Действительно, $2^7 = 2^6 + 2^6 > 120 = 5! > 2^6 + 2^5$ и $2^{10} = 2^9 + 2^9 > 2^9 + 2^8 > 720 = 6! > 2^8 + 2^8$.

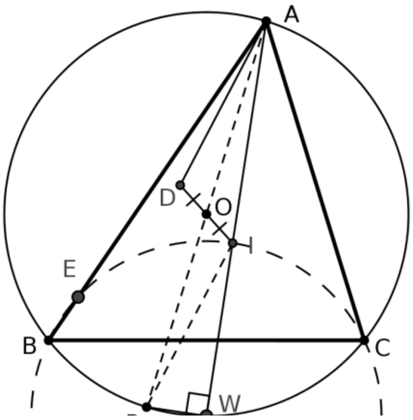
Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Решение обоснованно сведено к конечному перебору, но он не выполнен или выполнен с ошибкой*

«∓» *Приведён только верный ответ с указанием соответствующих значений a и b*
«–» *Задача не решена или решена неверно*

11.6. В треугольнике *ABC* построена точка *D*, симметричная центру *I* вписанной окружности относительно центра *O* описанной окружности. Докажите, что $AD^2 = 4R^2 - AB \cdot AC$, где *R* – радиус описанной окружности треугольника *ABC*.

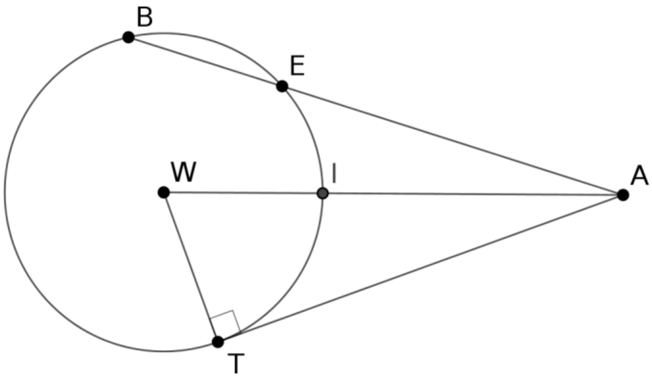


Решение. Пусть биссектриса *AI* пересекает описанную окружность в точке *W.* Проведем диаметр *AP* (см. рис 11.6а). Тогда *ADPI* – параллелограмм и $AD = PI$.

Тогда доказываемое равенство можно записать в виде: $AB \cdot AC = 4R^2 - AD^2 = AP^2 - PI^2$ (1). Кроме того, так как *AP* – диаметр окружности, то угол *AWP* – прямой. Тогда правую часть равенства (1) можно преобразовать: $AP^2 - PI^2 = (AW^2 + PW^2) - (WI^2 + PW^2) = AW^2 - WI^2$.

Таким образом, задача сводится к доказательству равенства $AB \cdot AC = AW^2 - WI^2$ (2).

Воспользуемся известным фактом: $WB = WC = WI$, который называют *теоремой трилистника* или *леммой о трезубце*. Центр *W* описанной окружности треугольника *BIC* лежит на биссектрисе угла *BAC*, поэтому точки пересечения этой окружности со сторонами угла *BAC* попарно симметричны относительно биссектрисы *AW*. В частности, симметричны точки *C* и *E*, значит, $AE = AC$.



Пусть *AT* – касательная к описанной окружности треугольника *BIC* (см. рис. 11.6б). Тогда $AB \cdot AE = AT^2$ (3). Из треугольника *AWT* по теореме Пифагора $AT^2 = AW^2 - WT^2 = AW^2 - WI^2$ (4). Из равенств (3) и (4), учитывая также, что $AC = AE$, получим: $AB \cdot AC = AB \cdot AE = AT^2 = AW^2 - WI^2$, то есть равенство (2), которое равносильно утверждению задачи.

В заключительной части решения можно обойтись без теоремы Пифагора, если использовать степень s точки A относительно окружности (BIC): $s = AB \cdot AE = AB \cdot AC = AW^2 - WI^2$. *Это утверждение, равно как и теорему о трилистнике, школьники могут использовать без доказательства.*

Критерии проверки.
«+» *Приведено полное обоснованное решение*
«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
«∓» *Присутствуют верные идеи решения, но до конца оно не доведено*
«–» *Задача не решена или решена неверно*