

## 8 класс

**8.1.** Петя ошибся, записывая десятичную дробь: цифры записал верно, а запятую сдвинул на одну позицию. В результате получилось число, которое меньше нужного на 19,71. Какое число должен был записать Петя?

**Ответ:** 21,9.

**Решение.** Так как в результате ошибки число уменьшилось, то запятая была сдвинута влево. При этом число уменьшилось в 10 раз. Пусть получилось число  $x$ , тогда искомое число – это  $10x$ . По условию:  $10x - x = 19,71$ , значит,  $x = 2,19$ ,  $10x = 21,9$ .

Если считать, что дробь могла быть и отрицательной, то аналогичными рассуждениями можно получить и другой ответ:  $-2,19$ . Но от школьников это не требуется.

Критерии проверки.

«+» Приведено полное обоснованное решение

«±» Приведено верное рассуждение, но допущена вычислительная ошибка

«±» Приведены верное уравнение и верный ответ, но не объяснено, почему запятая сдвинулась влево

«∓» Приведен только верный ответ

«-» Задача не решена или решена неверно

**8.2.** На скотном дворе живут шесть животных. Лошадь съедает копну сена за 1,5 дня, бык – за 2 дня, корова – за 3 дня, телёнок – за 4 дня, баран – за 6 дней, а коза – за 12 дней. Объясните, каким образом можно разбить данных животных на две группы так, чтобы этим группам хватало одной копны сена на одно и то же время.

**Ответ:** возможны два способа разбиения: 1) в одной группе – лошадь и корова, в другой – бык, телёнок, баран и коза; 2) в одной группе – лошадь, теленок и коза; в другой – бык, корова и баран.

**Решение.** Первый способ. Найдем, какую часть копны сена каждое животное

поедает за день: лошадь –  $\frac{2}{3}$ , бык –  $\frac{1}{2}$ , корова –  $\frac{1}{3}$ , телёнок –  $\frac{1}{4}$ , баран –  $\frac{1}{6}$ , коза –  $\frac{1}{12}$ .

Так как сумма найденных чисел равна 2, то их требуется разбить на две группы так, чтобы сумма чисел в каждой группе была равна 1. Это можно сделать двумя способами:

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$  или  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ .

Второй способ. Подсчитаем, сколько копен сена съедает каждое животное за 12 дней: лошадь – 8, бык – 6, корова – 4, телёнок – 3, баран – 2, коза – 1. Разобьём полученные числа на две группы с равными суммами:  $8 + 4 = 6 + 3 + 2 + 1$  или  $8 + 3 + 1 = 6 + 4 + 2$ .

Критерии проверки.

«+» Приведено любое из двух верных разбиений и объяснено, почему оно удовлетворяет условию задачи

«±» Приведено любое из двух верных разбиений, но обоснование содержит пробелы или неточности

«∓» Приведен только верный ответ (один или два способа разбиения)

«-» Задача не решена или решена неверно

**8.3.** Известно, что  $\frac{1}{3a} + \frac{2}{3b} = \frac{3}{a+2b}$ . Докажите, что  $a = b$ .

**Решение.** Преобразуем данное равенство, умножив обе его части на  $3ab(a+2b)$ . Получим:  $b(a+2b) + 2a(a+2b) = 9ab$ . После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых равенство примет вид:  $2b^2 + 2a^2 - 4ab = 0$ . Следовательно,  $(a-b)^2 = 0$ , откуда  $a = b$ .

Критерии проверки.

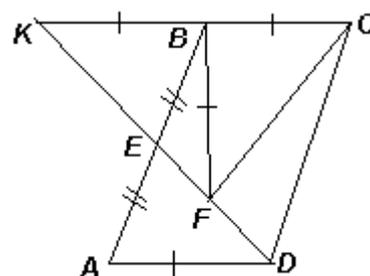
«+» Приведено полное обоснованное решение

«-» Задача не решена или решена неверно

**8.4.** Точка  $E$  – середина стороны  $AB$  параллелограмма  $ABCD$ . На отрезке  $DE$  нашлась такая точка  $F$ , что  $AD = BF$ . Найдите величину угла  $CFD$ .

**Ответ:**  $90^\circ$ .

**Решение.** Продолжим  $DE$  до пересечения с прямой  $BC$  в точке  $K$  (см. рис. 8.4). Так как  $BK \parallel AD$ , то  $\angle KBE = \angle DAE$ . Кроме того,  $\angle KEB = \angle DEA$  и  $AE = BE$ , значит, равны треугольники  $BKE$  и  $ADE$ . Тогда  $BK = AD = BC$ .



Таким образом, в треугольнике  $CFK$  медиана  $FB$  равна половине стороны, к которой она проведена, поэтому этот треугольник – прямоугольный с прямым углом  $F$ . Следовательно, и угол  $CFD$  – прямой.

Критерии проверки.

«+» *Приведено верное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

«-» *Приведен только ответ*

«-» *Задача не решена или решена неверно*

**8.5.** Кузя разрезал выпуклый бумажный 67-угольник по прямой на два многоугольника, затем таким же образом разрезал один из двух получившихся многоугольников, затем – один из трёх получившихся, и так далее. В итоге у него получилось восемь  $n$ -угольников. Найдите все возможные значения  $n$ .

**Ответ:**  $n = 11$ .

**Решение.** Прямолинейный разрез бывает трёх видов: от стороны к стороне, от вершины к стороне и от вершины до вершины. Значит, после одного разреза суммарное количество сторон многоугольников увеличивается на 4, 3 или 2 соответственно. Кузя сделал 7 разрезов, поэтому добавилось не меньше, чем 14, но не больше, чем 28 сторон, следовательно, у восьми  $n$ -угольников в сумме от 81 до 95 сторон. Из целых чисел этого отрезка только число 88 делится на 8 без остатка, поэтому  $n = 88 : 8 = 11$ .

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, не объяснено как меняется суммарное количество сторон в каждом из трёх случаев)*

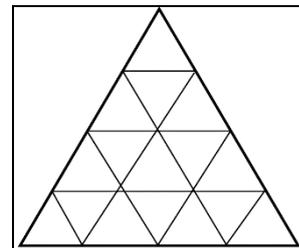
«-» *Верный ответ получен, но рассмотрены не все случаи*

«-» *Приведён верный ответ и только проверено, что условию он удовлетворяет, но никак не доказано отсутствие других ответов*

«-» *Приведен только ответ*

«-» *Задача не решена или решена неверно*

**8.6.** Треугольник разбит на треугольные ячейки так, как показано на рисунке. В каждую ячейку вписали натуральное число. Для каждой стороны треугольника есть четыре слоя, параллельных этой стороне, содержащие семь, пять, три и одну ячейку соответственно. Оказалось, что сумма чисел в каждом из этих двенадцати слоёв – простое число. Какова наименьшая возможная сумма всех записанных чисел?



**Ответ:** 22.

**Решение.** Пример. В каждую из трёх угловых ячеек впишем число 3, а в каждую из остальных – число 1. Тогда сумма записанных чисел равна  $3 \cdot 3 + 13 \cdot 1 = 22$ , а суммы чисел в слоях: 11, 5, 3 и 3 соответственно.

Оценка. Любая угловая ячейка – это отдельный слой, поэтому в каждой такой ячейке должно стоять, как минимум, число 2. Рассмотрим, например, остальные горизонтальные слои. В двух слоях ниже угловой ячейки можно поставить числа с минимальными суммами: 1-1-1 и 1-1-1-1-1. Тогда в нижнем слое расстановка с минимальной суммой:  $2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 9$ , но это не простое число. Ближайшее простое число, большее девяти, – это 11. Тогда сумма всех чисел не меньше, чем  $2 + 3 + 5 + 11 = 21$ .

Но эта сумма не достигается, так как при аналогичном рассмотрении четырёх слоев вдоль других сторон исходного треугольника, получим, что добавить 2 надо в каждый слой из семи ячеек. Следовательно, 22 – наименьшая возможная сумма.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

« $\mp$ » *Приведён верный ответ и верный пример, но оценка отсутствует*

«-» *Приведен только ответ*

«-» *Задача не решена или решена неверно*