Числа Маркова в арифметике и геометрии

Прохоров Ю. Г.

23 мая 2021 г.

Уравнение Маркова

Определение

Уравнение Маркова – диофантово уравнение вида

$$(*) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1 x_2 x_3,$$

Тройки Маркова – решения уравнения (*) в натуральных числах

$$(x_1 = m_1, x_2 = m_2, x_3 = m_3).$$

Числа Маркова – все натуральные числа, появляющиеся в этих тройках.

Пример: $(1,1,1)$, $(2,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,2)$. Это все решения, у которых $m_i = m_j$ при $i \neq j$. Они называются сингулярными.

Андрей Андреевич Марков-старший. Русский математик (1856–1922). Специалист по теории вероятностей, математическому анализу и теории чисел. Ученик П. Л. Чебышёва. Отец А. А. Маркова-младшего.

О БИНАРНЫХЪ
КВАДРАТИЧНЫХЪ ФОРМАХЪ
ПОЛОЖИТЕЛЬНАГО ОПРЕДѢЛИТЕЛЯ.

РАЗСУЖДЕНІЕ

А. МАРКОВА.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
(Вас. Остр., 9 лин. № 12.)
1880.

Решение уравнения Маркова

$$(*) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1x_2x_3$$

Элементарные перестройки решений (мутации)

Фиксируем $x_1 = m_1$ и $x_2 = m_2$ и рассматриваем (*) как квадратное уравнение относительно x_3.
По формулам Виета

$$m_3 + m_3' = 3m_1m_2, \qquad m_3m_3' = m_1^2 + m_2^2 \qquad \Longrightarrow$$

$$(m_1, m_2, m_3) \longrightarrow (m_1, m_2, \underbrace{3m_1m_2 - m_3}_{=\,m_3'})$$

Решение действительно новое: если $m_3 = m_3'$, то

$$3m_1m_2 = 2m_3 \qquad \Longrightarrow \qquad m_1^2 + m_2^2 = m_3^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{противоречие}$$

“Размножаем” решения:

Начинаем с решения (m_1, m_2, m_3). Применяем 3 мутации по каждой переменной

$$m_1' := 3m_2m_3 - m_1, \qquad m_2' := 3m_1m_3 - m_2, \qquad m_3' := 3m_1m_2 - m_3$$

Получаем

$$(m_1, m_2', m_3)$$

$$(m_1, m_2, m_3)$$

$$(m_1', m_2, m_3) \qquad\qquad (m_1, m_2, m_3')$$

Лемма

Если (m_1, m_2, m_3) – несингулярное решение, то все тройки (m_1', m_2, m_3), (m_1, m_2', m_3), (m_1, m_2, m_3') различны.

Доказательство.

Пусть $m_1 > m_2 > m_3$. Рассмотрим

$$f(t) := t^2 - 3tm_2m_3 + m_2^2 + m_3^2 = (t - m_1)(t - m_1'),$$

$$f(m_2) := 2m_2^2 + m_3^2 - 3m_2^2m_3 < 0 \quad \Longrightarrow \quad m_1 > m_2 > m_1'.$$

$$m_2' = 3m_1m_3 - m_2 > m_1, \quad m_3' = 3m_1m_2 - m_3 > 3m_1m_3 - m_2 = m_2'.$$

$$m_3' > m_2' > m_1 > m_2 > m_1'. \qquad \square$$

Следствие

Элементарная перестройка в максимальном элементе тройки уменьшает этот элемент: $m_1 > m_2 > m_3 \quad \Longrightarrow$

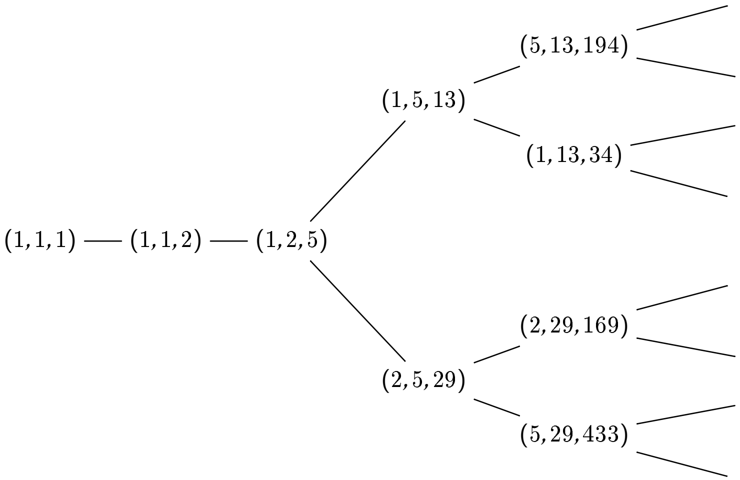
$$(m_1, m_2, m_3) \longmapsto (m_1', m_2, m_3), \quad m_1' < m_2 < m_1.$$

$$\begin{tikzcd}
& (m_1, m_2', m_3) \arrow[d, dash] & \\
& (m_1, m_2, m_3) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(m_1', m_2, m_3) & & (m_1, m_2, m_3')
\end{tikzcd}$$

Вывод.

Любое решение уравнения Маркова получается из $(1,1,1)$ последовательным применением мутаций.

Дерево Маркова



Числа Фибоначчи в дереве Маркова

Пусть $m_3 = 1$. Мутация по 2-й неизвестной & перестановка:

$$(m_1,\ m_2,\ 1) \longmapsto (m_1,\ m_2' = 3m_1 - m_2,\ 1) \longmapsto (3m_1 - m_2,\ m_1,\ 1).$$

Начинаем с $(1,1,1)$. Получаем последовательность (ветка Фибоначчи):

$$(1,1,1) \longmapsto (2,1,1) \longmapsto (5,2,1) \longmapsto (13,5,1) \longmapsto (34,13,1) \longmapsto \cdots$$

$$a_{i+2} = 3a_i - a_{i+1}.$$

Числа Фибоначчи:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144, \ldots$$

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad f_{2i+5} = 3f_{2i+3} - f_{2i+1}$$

$$\hat{a}_i := f_{2i+1}, \quad \hat{a}_{i+1} := f_{2i+3}, \quad \hat{a}_{i+2} := f_{2i+5} \quad \Longrightarrow \quad \hat{a}_{i+2} = 3\hat{a}_i - \hat{a}_{i+1}.$$

Числа Пелля в дереве Маркова

Пусть $m_3 = 2$. Тогда $m_2' = 6m_1 - m_2$,

$$(m_1,\ m_2,\ 2) \longmapsto (m_1,\ m_2' = 6m_1 - m_2,\ 2) \longmapsto (m_2' = 6m_1 - m_2,\ m_1,\ 2)$$

Начинаем с $(1, 1, 2)$. Получаем последовательность (ветка Пелля):

$$(1,1,2) \longmapsto (5,1,2) \longmapsto (29,5,2) \longmapsto (169,29,2) \longmapsto (985,169,2) \longmapsto \cdots$$

$$b_{i+2} = 6b_i - b_{i+1}.$$

Число Пелля (число y в решениях уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = \pm 1$):

$$1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408,\ 985,\ 2378, \ldots$$

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \quad p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n \quad \Longrightarrow \quad p_{2i+5} = 6p_{2i+3} - p_{2i+1}$$

$$\hat{b}_i := p_{2i+1}, \quad \hat{b}_{i+1} := p_{2i+3}, \quad \hat{b}_{i+2} := p_{2i+5} \quad \Longrightarrow \quad \hat{b}_{i+2} = 6\hat{b}_i - \hat{b}_{i+1}.$$

Свойства чисел Маркова

- (m_1, m_2, m_3) – тройка Маркова $\Longrightarrow m_1, m_2, m_3$ попарно взаимно просты,
- любое число Маркова не делится на 3,
- любое число Маркова не делится на 4,
- любое число Маркова является максимальным в некоторой тройке.

Гипотеза (гипотеза единственности, Фробениус 1913)

Тройка Маркова однозначно определяется своим максимальным элементом.

Приближения иррациональных чисел рациональными

Теорема (Дирихле)

Число θ иррационально $\iff$ существует бесконечно много $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ таких, что

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Теорема (Гурвиц)

Если θ иррационально, то существует бесконечно много $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ таких, что

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Констнату $\sqrt{5}$ нельзя заменить на бо́льшую.

Идея доказательства

Разложение в цепные дроби: $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{a}_0 = [\theta], \quad \theta = \mathrm{a}_0 + \frac{1}{\theta_1}, \quad \mathrm{a}_1 = [\theta_1], \quad \theta_1 = \mathrm{a}_1 + \frac{1}{\theta_2}, \quad \mathrm{a}_2 = [\theta_2], \quad \theta_2 = \cdots$$

$$\theta = \mathrm{a}_0 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_1 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_2 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_3 + \cdots}}} =: [\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \ldots]$$

Пример

$\theta = [1, 1, 1, \ldots], \quad \theta = 1 + \frac{1}{\theta} \quad \Longrightarrow \quad \theta^2 - \theta - 1 = 0, \quad \theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Подходящие дроби:

$$s_k := [a_0; a_1, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}, \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

Лемма

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k-1}}, \qquad \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{(-1)^k a_k}{q_k q_{k-2}}$$

$$s_2 \le s_4 \le \cdots \le s_{2i} \le \cdots \le \theta \le \cdots \le s_{2i-1} \le \cdots \le s_3 \le s_1, \quad \theta = \lim s_k$$

Пример: $s_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{f_{n+1}}{f_n}$, $\{f_n\}$ – числа Фибоначчи

Принцип: подходящие дроби – лучшие приближения

Доказывается, что одно из следующих неравенств имеет решение

$$\left|\theta - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}, \qquad \left|\theta - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{k-1}^2}, \qquad \left|\theta - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{k-2}^2}.$$

Спектр Лагранжа

Определение

Число Лагранжа для $\theta \in \mathbb{R}$ – наибольшее (точнее, верхняя грань) $\lambda = \lambda(\theta)$ такое, что существует бесконечно много $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ таких, что

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Спектр Лагранжа: $\mathbb{L} := \{ \lambda(\theta) \}$.

Таким образом,

- $\lambda(\theta) = 0 \iff \theta \in \mathbb{Q}$,
- $\theta \notin \mathbb{Q} \implies \lambda(\theta) \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Замечание

Возможно: $\lambda(\theta) = +\infty$

Вопрос

Почему оцениваем величиной $\frac{1}{q^2}$?

Определение

Число θ называется алгебраическим, если оно является корнем многочлена с рациональными коэффициентами:

$$a_n\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \cdots + a_1\theta + a_0 = 0, \qquad a_i \in \mathbb{Q}$$

Теорема (К. Рот, 1955 г.)

Если θ – иррациональное алгебраическое число, то для любого $\epsilon > 0$ неравенство

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}.$$

имеет лишь конечное число решений.

История вопроса: Гурвиц – Лиувилль – Туэ – Зигель – Рот.

Квадратичные формы

Бинарная квадратичная форма:

$$f(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Дискриминант:

$$D := \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Форма $f(x,y)$ неопределенная, если она может принимать и положительные и отрицательные значения ($\iff D > 0$).
Арифметический минимум:

$$\mathsf{min}'(f) := \mathsf{min}\left\{ |f(x,y)| \;\middle|\; x,y \in \mathbb{Z}, \quad (x,y) \neq (0,0) \right\}.$$

Константа Маркова формы f:

$$\mu(f) := \frac{\sqrt{D}}{\mathsf{min}'(f)}.$$

Спектр Маркова:

$$\mathbb{M} := \{ \ \mu(f) \ \}.$$

Эквивалентность

Определение

Числа $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ называются эквивалентными, если

$$\theta' = \frac{a\theta + b}{c\theta + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = \pm 1.$$

- Введенное отношение – отношение эквивалентности.
- Для эквивалентных чисел θ, θ' имеем $\lambda(\theta) = \lambda(\theta')$.

Определение

Формы f и f' эквивалентны, если $\exists\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$f'(x, y) = f(ax + by, cx + dy), \qquad ad - bc = \pm 1.$$

- Введенное отношение – отношение эквивалентности.
- Эквивалентные формы имеют один и тот же минимум.

Связь квадратичных форм с приближениями

Предложение

Пусть $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ является корнем уравнения $f(x,1) = 0$, где f – бинарная квадратичная форма. Тогда

$$\mu(f) \geq \lambda(\theta).$$

Если коэффициенты f рациональны, то $\mu(f) \geq \lambda(\theta)$.

Доказательство

Пусть θ' – второй корень уравнения $f(x,1) = 0$. Имеем

$$f(x,y) = \alpha(x-\theta y)(x-\theta' y) = \alpha(\theta-\theta')y(x-\theta y) + \alpha(x-\theta y)^2$$

Мы можем считать, что $D = 1$. Тогда $\theta - \theta' = \pm 1/\alpha$.

$$f(x,y) = \pm y(x-\theta y) + \alpha(x-\theta y)^2$$

Связь квадратичных форм с приближениями

Доказательство

$$f(x,y) = \pm y(x-\theta y) + \alpha(x-\theta y)^2$$

Возьмем $\lambda_0 < \lambda(\theta)$. Тогда неравенство

$$|y(x-\theta y)| < \frac{1}{\lambda_0} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\left|\theta - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{\lambda_0 y^2} \right)$$

имеет бесконечно много решений $(x,y) = (p,q) \quad \Longrightarrow$

$$\frac{1}{\mu(f)} = \min{}'(f) \leq |f(p,q)| \leq \tfrac{1}{\lambda_0} + \tfrac{\alpha}{\lambda_0^2 q^2}$$

Можно взять $q \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(f) \geq \lambda_0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(f) \geq \lambda(\theta)$. □

Формы Маркова

Пусть $(m_1 = m,\ m_2,\ m_3)$ – тройка Маркова:

$$m^2 + m_2^2 + m_3^2 = 3mm_2m_3, \qquad m \geq m_2, m_3$$

Так как НОД$(m, m_2) = 1$, то $\exists\ u \in \mathbb{Z}$

$$m_2 u \equiv m_3 \mod m, \qquad 0 < u < m.$$

Так как $m_2^2 + m_3^2 \equiv 0$, то $u^2 \equiv -1$. Значит $\exists\ v \in \mathbb{Z}$

$$u^2 + 1 = mv.$$

Форма Маркова:

$$F_m(x, y) := mx^2 + (3m - 2u)xy + (v - 3u)y^2.$$

Формы Маркова

Примеры

Примеры:

- $(m,\ m_2,\ m_3) = (1,1,1) \quad \rightsquigarrow \quad F_1 = x^2 + 3xy + y^2$
- $(m,\ m_2,\ m_3) = (2,1,1) \quad \rightsquigarrow \quad F_2 = 2x^2 + 4xy - 2y^2$
- $(m,\ m_2,\ m_3) = (5,2,1) \quad \rightsquigarrow \quad F_5 = 5x^2 + 11xy - 5y^2$
- $(m,\ m_2,\ m_3) = (29,5,2) \quad \rightsquigarrow \quad F_{29} = 29x^2 + 63xy - 31y^2$

Замечание

Перестановка m_2 и m_3 дает эквивалентную форму Маркова:

$$m_3u' \equiv m_2 \mod m, \quad u + u' = m, \quad v' = v$$

$$F'_m(x,y) := mx^2 + (3m - 2u')xy + (v' - 3u')y^2.$$

Результаты Маркова

Теорема

Пусть $f(x,y)$ – неопределенная бинарная квадратичная форма.

- $\mu(f) < 3 \iff f$ эквивалентна кратному формы Маркова.

Пусть $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 5, \ldots$ – упорядоченная последовательность всех чисел Маркова. Определим

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{9m_n^2 - 4}}{m_n}, \qquad \lambda_n < 3$$

Теорема

Пусть θ – иррациональное действительное число.

- $\lambda(\theta) < 3 \iff \theta = \lambda_n \iff \theta$ эквивалентна корню $F_{m_n}(x,1) = 0$, где m_n – число Маркова.

Спектры Лагранжа и Маркова

Следствие

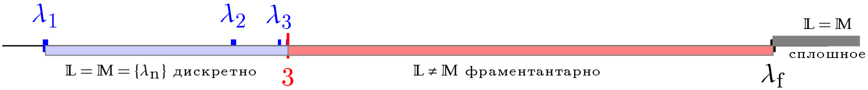
На интервале $[0,3)$ спектры Лагранжа и Маркова совпадают:

$$\mathbb{L} \cap [0,3) = \mathbb{M} \cap [0,3) = \{\ \lambda_{\mathrm{n}}\ \}$$

Теорема

$\mathbb{L} \subset \mathbb{M}, \qquad \mathbb{L} \neq \mathbb{M}$

Число Фреймана: $\lambda_{\mathrm{f}} := \frac{2221564096+283748\sqrt{462}}{491993569} \approx 4.52$



$$\lambda_1 = \sqrt{5} \approx 2.2, \quad \lambda_2 = \sqrt{8} \approx 2.82, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{221}}{5} \approx 2.97, \quad \lambda_4 = \frac{\sqrt{1517}}{13} \approx 2.99$$

Проективная плоскость

Обычную плоскость $\mathbb{A}^2$ дополняем бесконечно удаленной прямой: $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup \mathrm{L}_\infty$. Точки на L_∞ – точки пересечения параллельных прямых. Координатная реализация: точки на $\mathbb{P}^2$ – это тройки чисел $(\mathrm{x}:\mathrm{y}:\mathrm{z})$ не все равные нулю, при этом пропорциональные отождествляются:

$$(\mathrm{x}:\mathrm{y}:\mathrm{z}) = (\mathrm{x}':\mathrm{y}':\mathrm{z}') \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \neq 0 \quad \mathrm{x}' = \lambda \mathrm{x},\ \mathrm{y}' = \lambda \mathrm{y},\ \mathrm{z}' = \lambda \mathrm{z}.$$

Бесконечная прямая $\mathrm{L}_\infty = \{(\mathrm{x}:\mathrm{y}:0)\} = \{\mathrm{z}=0\}$. Точки на $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \mathrm{L}_\infty$ – точки с ненулевой последней координатой z. Тогда можно считать, что $\mathrm{z}=1 \Longrightarrow$ точки на $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \mathrm{L}_\infty$ однозначно записываются в виде

$$(\mathrm{x}:\mathrm{y}:1) \longleftrightarrow (\mathrm{x},\mathrm{y})$$

– обычные координаты на плоскости. Аналогично, можно рассмотреть

$$\mathrm{M}_\infty = \{\mathrm{y}=0\}, \qquad \mathrm{N}_\infty = \{\mathrm{x}=0\}$$

как бесконечные прямые и их дополнения $\mathbb{P}^2 \setminus \mathrm{M}_\infty$ и $\mathbb{P}^2 \setminus \mathrm{N}_\infty$ – обычные плоскости. Это аффинные карты.

Взвешенные проективные плоскости

Зафиксируем тройку натуральных чисел (a, b, c) (веса). Взвешенная проективная плоскость $\mathbb{P}(a, b, c)$ – множество троек чисел $(x : y : z) \neq (0 : 0 : 0)$ с отождествлением:

$$(x : y : z) = (x' : y' : z') \iff \exists \lambda \neq 0 \quad x' = \lambda^a x,\ y' = \lambda^b y,\ z' = \lambda^c z.$$

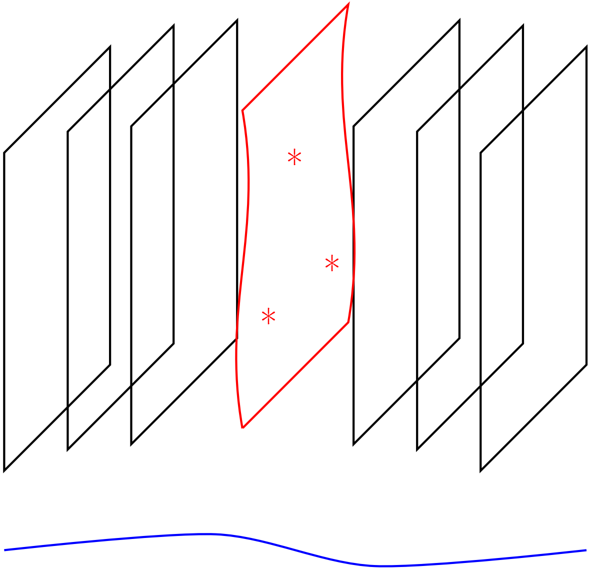
Обычно считают, что веса попарно взаимно просты.

Пример

Рассмотрим $\mathbb{P}(3, 2, 1)$. Отождествления $(x : y : z) = (\lambda^3 x : \lambda^2 y : \lambda z)$.

- $L_\infty = \{z = 0\}$, как и в случае обычной проективной плоскости, можно считать, что $z = 1 \implies$ точки на $\mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$ однозначно записываются в виде $(x : y : 1) \longleftrightarrow (x, y) \implies \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty = \mathbb{A}^2$.
- $M_\infty = \{y = 0\}$. Точки на $\mathbb{P}^2 \setminus M_\infty$ нельзя однозначно записать в виде $(x : 1 : z)$ т.к. для $\lambda = -1$ $(x : 1 : z) = (-x : 1 : -z)$. Точки на $\mathbb{P}^2 \setminus M_\infty$ описываются тремя параметрами $t = x^2$, $s = z^2$, $r = xz$, которые зависимы: $ts = r^2$.

Вырождения проективной плоскости



Вырождения проективной плоскости

Вырождение (сглаживание)

$$f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (\mathbb{R})$$

- для $t \neq 0$ имеем $f^{-1}(t) = \mathbb{P}^2$,
- $f^{-1}(0) = \mathbb{P}(a,b,c)$.

Теорема

Пусть $\mathbb{P}(a,b,c)$ – вырождение $\mathbb{P}^2$. Тогда $(a,b,c) = (m_1^2, m_2^2, m_3^2)$, где (m_1, m_2, m_3) – тройка Маркова. Обратно, каждая взвешенная проективная плоскость $\mathbb{P}(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$ является вырождением $\mathbb{P}^2$.

Числа Маркова в арифметике и геометрии

- Вопросы приближения иррациональных чисел.
- Бинарные квадратичные формы.
- Вырождения проективной плоскости.
- Исключительные векторные расслоения на $\mathbb{P}^2$.
- Числа Маркова в геометрии Лобачевского.
- Числа Маркова в симплектической геометрии.