

11 класс, первый день

1. К графикам функций $y = \cos x$ и $y = a \operatorname{tg} x$ провели касательные в некоторой точке их пересечения. Докажите, что эти касательные перпендикулярны друг другу для любого $a \neq 0$.

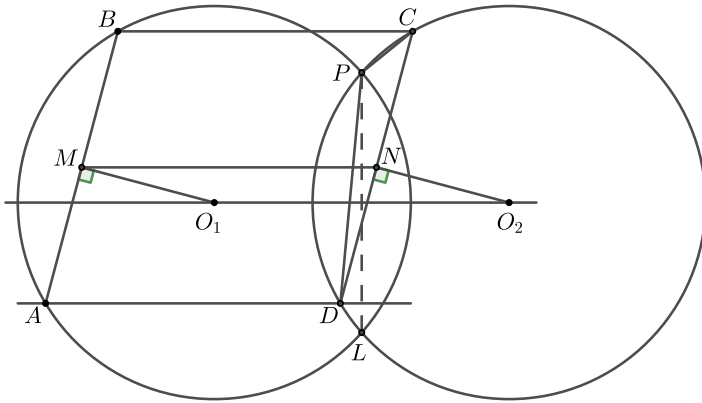
(В.А. Клепцын, Г.А. Мерзон)

Решение. Абсцисса x_0 любой точки пересечения графиков данных функций удовлетворяет равенству $\cos x_0 = a \operatorname{tg} x_0$. В этой точке касательная к графику функции $y = \cos x$ имеет угловой коэффициент $k_1 = -\sin x_0$, а касательная к графику функции $y = a \operatorname{tg} x$ имеет угловой коэффициент $k_2 = \frac{a}{\cos^2 x_0}$. Поскольку $k_1 k_2 = -\frac{a \operatorname{tg} x_0}{\cos^2 x_0} = -1$, эти касательные перпендикулярны друг другу.

2. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, отличный от прямоугольника, а точка P выбрана внутри него так, что описанные окружности треугольников PAB и PCD имеют общую хорду, перпендикулярную AD . Докажите, что радиусы данных окружностей равны.

(А.А. Заславский)

Решение.



Способ 1. Заметим, что линия центров O_1O_2 перпендикулярна общей хорде данных окружностей, а значит параллельна прямым AD и BC . Пусть M — середина отрезка AB , N — середина отрезка CD . Тогда $O_1M \perp AB$, $O_2N \perp CD$ и, поскольку $AB \parallel CD$, прямые O_1M и O_2N параллельны. Далее, $O_1O_2 \parallel AD$ и при этом $AD \parallel MN$, поэтому $O_1O_2 \parallel MN$. Заключаем, что четырёхугольник O_1MNO_2 — параллелограмм по определению, следовательно, $O_1M = O_2N$. Кроме того, поскольку отрезки MB и NC равны, то по двум катетам будут равны прямоугольные треугольники O_1MB и O_2NC , следовательно, равны их гипотенузы O_1B и O_2C , являющиеся также радиусами наших окружностей, что и требовалось.

Способ 2. Предположим противное, радиусы окружностей ω_1 и ω_2 , описанных около треугольников PAB и PCD соответственно, различны.

При параллельном переносе на \overrightarrow{CB} отрезок CD перейдёт в отрезок AB , окружность ω_2 перейдёт в окружность ω_3 , а прямая O_1O_2 перейдёт в себя. Причём ω_3 не может совпадать с ω_1 , поскольку их радиусы различны. Поэтому линия центров O_3O_1 , совпадающая с прямой O_1O_2 , перпендикулярна общей хорде AB . Таким образом, прямая AB параллельна общей хорде окружностей ω_1 и ω_2 и, следовательно, перпендикулярна прямой AD . Но тогда параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником, что противоречит условию задачи. Следовательно, радиусы окружностей ω_1 и ω_2 равны.

3. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 5$ с целыми коэффициентами, имеющий n различных целых корней. Докажите, что многочлен $P(x) + 3$ имеет n различных действительных корней.

(М.И. Малкин)

Решение. Пронумеруем корни многочлена в порядке возрастания $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Тогда многочлен можно представить в виде

$$P(x) = a(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n), \quad a \neq 0, \quad a, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что значение многочлена P в любой точке локального экстремума по модулю больше 3 (тогда при сдвиге графика многочлена на 3 единицы вверх или вниз количество его точек пересечения с осью абсцисс не изменится). Точки локальных экстремумов многочлена P находятся на промежутках $(a_i; a_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Вычислим значения $|P(x)|$ в точках $x_i = a_i + \frac{1}{2}$. Так как корней не меньше шести, то

$$|P(x_i)| = |a(x_i - a_1)(x_i - a_2) \dots (x_i - a_n)| \geq |a| \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{25}{4} = |a| \cdot \frac{225}{64} = |a| \cdot 3\frac{33}{64} > 3.$$

В произведении мы оставляем шесть наименьших по модулю множителей, остальные (есть при $n > 6$) ещё больше.

4. В турнире по теннису (где не бывает ничьих) участвовало более 4 спортсменов. Каждый игровой день каждый теннисист принимал участие ровно в одной игре. К завершению турнира каждый сыграл с каждым в точности один раз. Назовём игрока *упорным*, если он выиграл хотя бы один матч и после первой своей победы ни разу не проигрывал. Остальных игроков назовём *неупорными*. Верно ли, что игровых дней, когда была встреча между неупорными игроками, больше половины?
(Б.Р. Френкин)

Решение. В последний день все упорные выиграли. Значит, их не больше половины. Если их меньше половины, то каждый день была встреча между неупорными игроками. Остаётся рассмотреть случай, когда количество упорных k составляет половину от общего количества игроков $2k$.

Такой турнир длился $2k - 1$ дней, и нужно доказать, что были хотя бы k дней, когда была встреча между неупорными. Это равносильно тому, что было хотя бы k дней, в которые была встреча между упорными, так как и тех, и других — ровно половина (если все упорные играют с неупорными, то в этих встречах участвуют все неупорные, и наоборот).

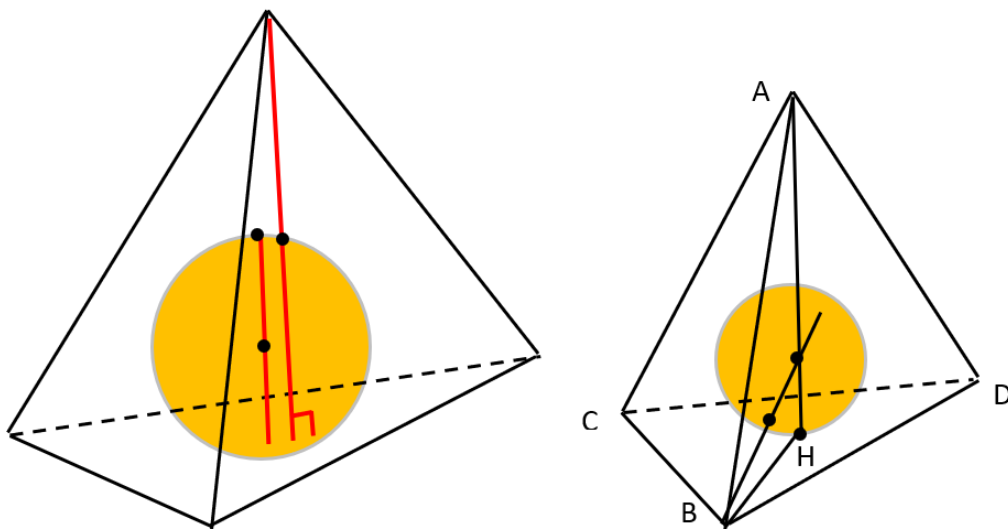
Предположим противное: пусть встречи между неупорными игроками проходили менее, чем в половине всех дней турнира. Тогда, в силу замечания выше, то же самое можно сказать и про встречи между упорными игроками. Так как всего упорных игроков k , каждый упорный играл с упорными $k - 1$ день. Поэтому единственный возможный вариант, при котором встречи между упорными игроками проходили менее чем в половине дней турнира, — это когда все упорные играют между собой в одни и те же дни. Другими словами можно сказать, что упорные проводят в этот $k - 1$ день между собой микротурнир, а такое возможно только если число упорных игроков чётно.

Вспомним теперь, что $2k > 4$, то есть $k > 2$, а поскольку k — чётное, то $k \geq 4$. Тогда в первый из дней микротурнира играли по крайней мере две пары упорных игроков, а значит было хотя бы два упорных, победивших в этот день. В дальнейшем они должны сыграть между собой, но тогда один из них проиграет после того как выиграл. Противоречие. Значит, наше предположение неверно, и игровых дней, когда была встреча между неупорными игроками, не менее половины.

5. Середины всех высот некоторого тетраэдра лежат на его вписанной сфере. Верно ли, что тетраэдр правильный?

(М.А. Евдокимов)

Решение.



Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, удовлетворяющий условию задачи. Заметим, что по условию для любой высоты h_i данного тетраэдра справедливо неравенство $\frac{h_i}{2} \leq 2r$, где r — радиус вписанной сферы, то есть $h_i \leq 4r$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Пусть S_i — площадь грани, на которую опущена высота h_i . Докажем, что $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

Предположим противное. Выберем грань минимальной площади (если таких граней несколько, то берём любую из них). Без нарушения общности можно считать, что её площадь равна S_1 (иначе можно ввести переобозначения). Так как не все S_i равны между собой и S_1 — наименьшая из них, то

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} > S_1.$$

Выразим объём тетраэдра двумя способами:

$$V = \frac{1}{3}h_1S_1 = \frac{1}{3}r(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) > \frac{1}{3}r \cdot 4S_1.$$

Отсюда $h_1 > 4r$, что противоречит неравенству $h_1 \leq 4r$.

Итак, все S_i равны, поэтому все h_i тоже равны, так как $h_i = \frac{3V}{S_i}$. Обозначим за h длину этих равных высот. Из приведённого выше соотношения для объёма получаем $h = 4r$, то есть неравенство $h \leq 4r$ обращается в равенство. Но это возможно только в случае, если высота содержит центр сферы и точку касания с гранью (и так для каждой высоты).

Пусть H — основание высоты тетраэдра, опущенной из точки A . Тогда H совпадает с точкой касания сферы и грани $B CD$. Пусть $BH = a$, тогда по теореме о касательной и секущей $a^2 = \frac{h}{2} \cdot h$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABH получаем

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = h^2 + a^2 = h^2 + \frac{h^2}{2} = \frac{3h^2}{2}.$$

Аналогично получаем такое же выражение для остальных рёбер тетраэдра, следовательно, они равны между собой, то есть тетраэдр правильный.

6. Назовём тройку чисел *триплетом*, если одно из них равно среднему арифметическому двух других. Дана бесконечная последовательность (a_n) , состоящая из натуральных чисел. Известно, что $a_1 = a_2 = 1$ и при $n > 2$ число a_n — минимальное натуральное число такое, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_n нет трёх, образующих триплет. Докажите, что $a_n \leq \frac{n^2 + 7}{8}$ для любого n .

(Б.Г. Бутырин)

Решение. Очевидно, что последовательность не убывает. Действительно, неравенство $a_n > a_{n+1}$ противоречило бы выбору a_n . Также понятно, что любое число повторяется не более, чем дважды, иначе в последовательности найдутся три одинаковых числа, а они образуют триплет. Теперь легко видеть, что если число c впервые встречается в последовательности в качестве a_n , то $a_{n+1} = a_n = c$.

Таким образом, для любого натурального числа k верно равенство $a_{2k-1} = a_{2k}$. Заметим, что тогда достаточно доказать требуемое неравенство только для нечетных индексов:

$$a_{2k} = a_{2k-1} \leq \frac{(2k-1)^2 + 7}{8} \leq \frac{(2k)^2 + 7}{8}.$$

Положим $b_k = a_{2k-1}$. Тогда нужно доказать, что

$$b_k \leq \frac{(2k-1)^2 + 7}{8} = \frac{k(k-1)}{2} + 1.$$

Отметим, что последовательность (b_n) обладает тем свойством, что при $k > 1$ очередной член последовательности b_k — минимальное натуральное число, которое не образует триплет с парами чисел из $\{b_1, \dots, b_{k-1}\}$, где пара может иметь вид (b_i, b_i) . При этом $b_k > b_{k-1}$, то есть (b_n) строго возрастает, в отличие от (a_n) .

Пусть n — минимальное натуральное число, для которого требуемое неравенство неверно, то есть $b_n > \frac{n(n-1)}{2} + 1$. Это означает, что среди чисел от 1 до $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ содержится ровно $n-1$ член последовательности, поскольку при $m < n$ по предположению имеем

$$b_m \leq \frac{m(m-1)}{2} + 1 < \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

Обозначим через s количество чисел в промежутке от 1 до $\frac{n(n-1)}{2} + 1$, не принадлежащих последовательности (b_n) . Тогда

$$s = \frac{n(n-1)}{2} + 1 - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = C_{n-1}^2 + 1.$$

Обозначим эти числа через d_i , $1 \leq i \leq s$.

В силу минимальности каждого из b_m для любого $1 \leq k \leq s$ найдутся такие числа b_{i_k}, b_{j_k} , где $i_k \leq j_k \leq n-1$, что (b_{i_k}, b_{j_k}, d_k) — триплет. При этом можно считать, что d_k — наибольший элемент в триплете, иное бы противоречило выбору наименьшего элемента последовательности (b_n) , большего d_k . Отсюда $i_k < j_k$.

Тогда число способов выбрать пару (i_k, j_k) не превосходит C_{n-1}^2 , то есть не больше количества способов выбрать два различных индекса из $\{1, 2, \dots, n-1\}$. В то же время парами (i_k, j_k) нужно обеспечить $s > C_{n-1}^2$ чисел d_i . Полученное противоречие завершает решение.