9 класс, критерии

Задача 1. Саша записывает числа 1, 2, 3, 4, 5 в каком-нибудь порядке, расставляет знаки арифметических операций «+», «−», «×» и скобки и смотрит на результат полученного выражения. Например, он может получить число 8 с помощью выражения $(4-3)\times(2+5)+1$. Может ли он получить число 123?

Формировать числа из нескольких других нельзя (например, из чисел 1 и 2 нельзя составить число 12).

Критерии

± В верном примере отсутствуют скобки. Например, $2\times4\times5+1\times3=123$.

± В верном примере написано 8 вместо 2×4. Например, $(8\times5+1)\times3=123$).

∓ Пример $2\times2\times5\times3+3$.

Задача 2. Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) одну или несколько одинаковых букв или убрать из последовательности одну или несколько подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций.

Критерии

+. В решении 1 не обосновано, что любые две буквы можно превратить в любые две за 2 операции.

± Алгоритм работает не более чем за 100 операций для всех пар последовательностей, кроме небольшого количества (например, кроме последовательностей, в которых буквы чередуются), а для них работает за 101 операцию.

∓ Алгоритм работает не менее чем за 101 операцию для большого количества последовательностей (например, для последовательностей, в которых 50 блоков из букв А).

Задача 3. Периметр треугольника ABC равен 1. Окружность ω касается стороны BC, продолжения стороны AB в точке P и продолжения стороны AC в точке Q. Прямая, проходящая через середины AB и AC, пересекает описанную окружность треугольника APQ в точках X и Y. Найдите длину отрезка XY.

Критерии

± Выписана система уравнений из решения 3 и без явных выкладок утверждается, что решение — это половины сторон треугольников.

∓ Задача решена в предположении, что точки B, I, X лежат на одной прямой (или в каком-нибудь похожем), но это предположение не доказано.

−. Правильный ответ.

Задача 4. Дано натуральное число $n > 1$. Назовём положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма её числителя и знаменателя равна n. Докажите, что любую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше n, можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания тогда и только тогда, когда n — простое число.

Напомним, что обыкновенная дробь — это отношение целого числа к натуральному.

Критерии

$\pm$ Доказано, что если любую хорошую дробь можно представить, то n — простое.

$\mp$ Доказано, что если n — простое, то любую хорошую дробь можно представить.

$-$ Задача решается для конкретных небольших n.

Задача 5. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

Критерии

$\pm$ Задача решена в предположении, что параллелограммы стыкуются между собой только целыми сторонами.

$\mp$ Задача решена в предположении, что параллелограммы стыкуются между собой только целыми сторонами и что стороны треугольников параллельны сторонам 100-угольника.

$-$ Задача решается в предположении, что параллелограммы имеют специальный вид, например: стыкуются со сторонами 100-угольника и треугольников целыми сторонами, являются ромбами.

$-$ Задача решается в предположении, что треугольники расположены некоторым специальным образом, например: образуют параллелограмм, примыкают к сторонам 100-угольника, симметричны относительно центра 100-угольника.

Задача 6. Назовем тройку чисел *триплетом*, если одно из них равно среднему арифметическому двух других. Последовательность (a_n) строится следующим образом: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и при $n > 1$ число a_n — такое минимальное натуральное число, большее a_{n-1}, что среди чисел a_0, a_1, …, a_n нет трёх, образующих триплет. Докажите, что $a_{2023} \leqslant 100\,000$.

Критерии

$-$ В работе считается, что исходная последовательность является арифметической или геометрической прогрессией.

$\mp$ Доказывается правильный общий вид последовательности a_n. Доказано, что $a_n+1, \ldots, a_{n+1}-1$ образуют триплеты с предыдущими членами последовательности, но не доказано, что a_{n+1} не образует триплетов.

$\mp$ Доказывается правильный общий вид последовательности a_n. Доказано, что a_{n+1} не образует триплетов с $a_1, \ldots, a_n$, но не доказано, что $a_n + 1, \ldots, a_{n+1} - 1$ образуют триплеты.