

LXXXVII
Московская
математическая
олимпиада

Задачи и решения

Москва
Издательство МЦНМО
2024

LXXXVII
Московская
математическая
олимпиада

Задачи и решения

Москва
Издательство МЦНМО
2024

Департамент образования и науки города Москвы
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Московское математическое общество
Факультет математики НИУ ВШЭ
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

 Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты mno@mcsme.ru

 Материалы данной книги размещены на странице

www.mcsme.ru/mno

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

Председатель оргкомитета LXXXVII ММО
член-корреспондент РАН *А. И. Аптекарев*

Сборник подготовили:

*А. Бегунц, А. Блинков, Д. Бродский, В. Буланкина,
Б. Бутырин, Е. Веретенников, А. Волостнов, М. Волчкевич,
Ф. Вылегжанин, Т. Гарманова, Т. Голенищева-Кутузова,
Д. Горяшин, А. Грибалко, Г. Гусев, М. Дидин, А. Доледенок,
С. Дориченко, М. Евдокимов, П. Закорко, А. Заславский,
О. Заславский, Т. Казицына, А. Канель-Белов, Г. Караваяев,
В. Клепцын, И. Климанова, М. Колодей, Д. Копьев,
Т. Корчемкина, А. Куссеев, А. Кушнир, М. Лисицын,
М. Ложкин, А. Мелешкина, Г. Мерзон, Д. Метелев,
Г. Минаев, И. Михайлов, Л. Неустроева, В. Новиков,
А. Панкратьев, А. Пешнин, А. Пономарев, А. Попов,
В. Радионов, А. Райгородский, И. Раскина, В. Ретинский,
И. Русских, Я. Слабодич, Л. Смирнова, А. Соколов,
А. Тертерян, А. Устинов, М. Федотова, Б. Френкин,
А. Хачатурян, М. Хачатурян, А. Чеботаренко,
Е. Чернышева, А. Шаповалов, Л. Шатунов, И. Шейпак,
А. Юран, Ю. Яровиков, И. Яценко*

6 класс

1. У Кати и Маши расчёски одинаковой длины. У каждой расчёски все зубчики одинаковые, а расстояния между зубчиками равны ширине зубчика. В Катиной расчёске 11 зубчиков (см. рис.). Сколько зубчиков в Машинной расчёске, если они в пять раз уже зубчиков Катиной расчёски? (Т. Казицына)

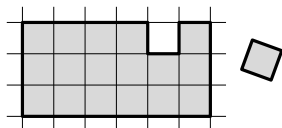


Ответ: 53.

Решение. Наложим Катину расчёску на Машину так, чтобы края совместились. Один зубчик Катиной расчёски закроет три зубчика Машинной и два промежутка между ними. В один просвет между Катиными зубчиками попадёт три Машинных промежутка и два зубчика. Всего на Катиной расчёске 11 зубчиков и 10 промежутков, что соответствует $11 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 53$ зубчикам Машинной расчёски.

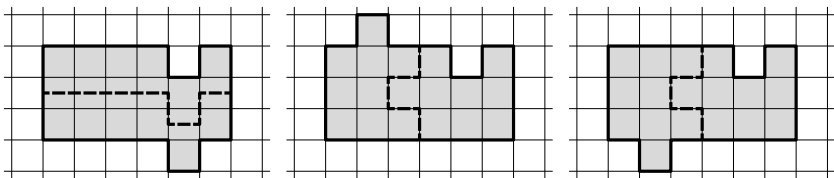
Можно рассуждать по-другому. В Катиной расчёске 11 зубчиков и 10 промежутков между ними. Всего $11 + 10 = 21$ одинаковых отрезков. В Машинной расчёске таких отрезков $21 \cdot 5 = 105$. Из них зубчиков на один больше, чем промежутков. То есть зубчиков 53, а промежутков 52.

2. Из прямоугольника 3×6 вырезали одну клетку (см. рис.). «Пришейте» эту клетку в другом месте так, чтобы получилась фигура, которую можно разрезать на две одинаковых.



(Т. Казицына)

Ответ: несколько примеров пришивания и разрезания см. на рисунках.



Комментарий. Части одинаковые, а значит, можно одну из частей переместить как единое целое, чтобы она наложилась

на другую. В первом примере для этого надо её сдвинуть параллельно самой себе, во втором повернуть вокруг некоторой точки, а в третьем сначала сдвинуть, а потом перевернуть на другую сторону. Эти перемещения называют движениями плоскости — они не меняют расстояния между точками фигуры, и поэтому фигура сохраняет свою форму и размеры. Движения, которые мы видим в этих примерах, называются соответственно параллельным переносом, поворотом и скользящей симметрией. Теорема Шэля гласит, что всякое движение плоскости относится к одному из трёх данных типов. Мишель Шаль — известный французский геометр XIX века.

3. В сумме

$$\text{П, Я} + \text{Т, Ь} + \text{Д, Р} + \text{О, Б} + \text{Е, Ы}$$

все цифры зашифрованы буквами (разными буквами — разные цифры). Оказалось, что все пять слагаемых не целые, но сама сумма является целым числом. Каким именно?

Для каждого возможного ответа напишите один пример с такими пятью слагаемыми. Объясните, почему другие суммы получить нельзя. (А. Шаповалов)

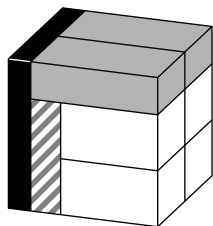
Ответ: 27 (пример $0,5 + 1,6 + 7,4 + 8,3 + 9,2 = 27$) и 18 (пример $0,9 + 1,8 + 3,7 + 5,4 + 6,2 = 18$).

Решение. Сумма $\text{Я} + \text{Б} + \text{Р} + \text{Б} + \text{Ы}$ должна оканчиваться нулём. Сумму 10 получить можно, только если взять пять наименьших цифр ($0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$), но такой пример не получится составить, так как ноль не может стоять после запятой (тогда дробь будет целым числом вопреки условию). Максимальная сумма пяти цифр $9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$, так что получить можно только суммы 20 и 30.

Заметим, что все буквы различны, то есть все десять цифр участвуют в записи по одному разу. Общая сумма всех десяти цифр равна 45. Поэтому если сумма цифр после запятой равна 20, то при суммировании после запятой мы получим 0, а в предыдущий разряд перенесем 2. Эта 2 добавится к сумме цифр до запятой, которая равна $45 - 20 = 25$, и мы находим ответ 27. Аналогично, если сумма цифр после запятой равна 30, то ответ будет равен $45 - 30 + 3 = 18$.

Комментарий. Примеров в этой задаче очень много — есть 86400 способов получить сумму 27 и 72000 способов получить сумму 18.

4. Миша сложил из восьми брусков куб (см. рис.). Все бруски имеют один и тот же объём, серые бруски одинаковые и белые бруски тоже одинаковые. Какую часть ребра куба составляют длина, ширина и высота белого бруска?



(М. Евдокимов)

Ответ: $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{14}$.

Решение. Будем считать, что ребро куба равно 1, тогда его объём тоже 1, а объём каждого из восьми брусков равен $\frac{1}{8}$.

Очевидно, что ширина серого и белого брусков равна $\frac{1}{2}$.

Два измерения чёрного бруска равны по 1, значит, третьё равно $\frac{1}{8}$. То есть длина серого бруска

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Теперь мы можем найти высоту серого бруска, разделив объём на произведение длины и ширины:

$$\frac{1}{8} : \left(\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{7}.$$

Оставшаяся часть высоты куба — удвоенная высота белого бруска, значит, высота белого бруска равна

$$\left(1 - \frac{2}{7} \right) : 2 = \frac{5}{14}.$$

Теперь найдём длину белого бруска тем же приёмом, что и высоту серого:

$$\frac{1}{8} : \left(\frac{5}{14} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{10}.$$

5. Решил шах проверить придворного мудреца. «Вот тебе шесть шкатулок, — сказал шах, — с надписями 1, 2, 3, 4, 5, 6 на крышках. В каждой шкатулке золотая монета, которая весит ровно столько граммов, сколько написано. Ты расставляешь шкатулки как угодно в клетках прямоугольника 2×3 . Потом я втайне от тебя меняю местами монеты в каких-то двух шкатулках, стоящих в соседних по стороне клетках (или ничего не меняю). Затем ты укажешь на несколько шкатулок, а я назову тебе общий вес монет

в них. Если после этого правильно определишь, какие монеты я переложил, останешься при дворе. А не сможешь — прогоню вон!»

Как может действовать мудрец, чтобы выдержать испытание? (А. Шаповалов)

Решение. Мудрец может расположить шкатулки, например, так:

4	5	1
2	6	3

И указать шаху те шкатулки, где на крышках массы 2, 3 и 5. Если шах назовёт сумму 10, значит, он ничего не менял. Если он менял местами какие-то монеты, сумма всякий раз будет другой:

Что менял шах	Сумма
ничего	10
4 и 2	12
5 и 6	11
1 и 3	8
4 и 5	9
2 и 6	14
5 и 1	6
6 и 3	13

Как видим, все суммы разные, так что по сумме мудрец сможет понять, менялись ли монеты и какие, и назвать их правильно.

Комментарий. Как мог рассуждать мудрец, придумывая пример? Раскрасим прямоугольник 2×3 в шахматном порядке. Ясно, что надо назвать либо три белые клетки, либо три чёрные — в противном случае среди названных (или не названных) будут две соседние, и мудрец не сможет определить, поменял в них шах монеты или нет. Возможные суммы в трёх шкатулках меняются в диапазоне от 6 до 15, причём сумма от замены монет может увеличиться или уменьшиться на 1, 2, 3, 4 или 5. Чтобы восемь сумм (исходная и при любом из семи обменов) были различны, исходная сумма должна быть примерно в середине ряда (равняться 10 или 11). Дальше можно действовать подбором.

6. В школе все ученики — отличники, хорошисты либо троечники. В круг встали 99 учеников. У каждого среди трёх соседей слева есть хотя бы один троечник, среди пяти соседей справа — хотя бы один отличник, а среди четырёх соседей — двух слева и двух справа — хотя бы один хорошист. Может ли в этом круге быть поровну отличников и троечников? (А. Шаповалов)

Ответ: не может.

Решение. Заметим, что первые два условия можно проще сформулировать так: среди любых трёх стоящих подряд есть троечник, среди любых пяти стоящих подряд есть отличник. Кроме того, рядом с каждым хорошистом или через одного человека от него должен стоять другой хорошист (назовем таких двух хорошистов друзьями). Если два друга-хорошиста стоят рядом, то с обеих сторон от них должны стоять троечники, а если через одного, то троечник стоит между ними. Поэтому, если у какого-то хорошиста есть два друга, то возникает одна из двух пятёрок — 34434 или 43434, в которых нет отличника, что невозможно. Таким образом, хорошисты распадаются на пары друзей, и поэтому хорошистов чётное число. А тогда отличников и троечников вместе — нечётное, значит, их не поровну.

7 класс

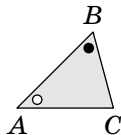
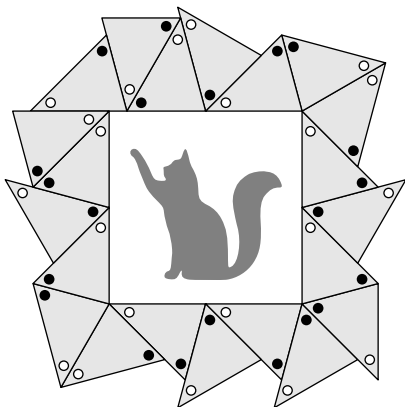
1. Расставьте в клетки квадрата 3×3 различные целые положительные числа, не большие 25, так, чтобы в любой паре соседних по стороне клеток одно число делилось на другое. (И. Яценко)

Решение. Больше всего соседей у центральной клетки — поставим туда 1. В соседние с центральной клеткой поставим числа поменьше — 2, 3, 4, 5. На центральное число все они делятся (на 1 делится любое число). А чтобы условие выполнялось и для угловых клеток, поставим в каждый угол произведение его соседей. Так получается один из возможных примеров:

10	2	8
5	1	4
15	3	12

Можно придумать и другие примеры.

2. Коля пришёл в музей современного искусства и увидел квадратную картину в раме необычной формы, состоящей из 21 равного треугольника. Коля заинтересовался, чему равны углы этих треугольников. Помогите ему их найти.



(И. Русских)

Ответ: 45° , 60° и 75° .

Решение. Посмотрим на левый верхний угол картины. Из него видно, что два угла, равных углу A , в сумме дают 90° . Значит, угол A равен 45° . Посмотрим теперь на правый верхний угол картины. Три угла, равных углу C , один угол, равный углу A , и угол квадрата составляют полный угол в 360° . Значит, $3\angle C = 360^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 225^\circ$, то есть угол C равен $225^\circ : 3 = 75^\circ$. Тогда угол B равен $180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$.

3. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4).

4. См. задачу 4 для 6 класса (с. 5).

5. На острове живут красные, синие и зелёные хамелеоны. 35 хамелеонов встали в круг. Через минуту все они одновременно меняли цвет, каждый на цвет одного из своих соседей. Ещё через минуту снова все одновременно меняли цвета на цвет одного из своих соседей. Могло ли оказаться, что каждый хамелеон побывал и красным, и синим, и зелёным?

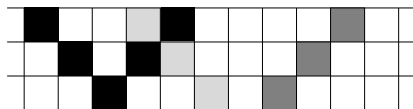
(И. Русских)

Ответ: не могло.

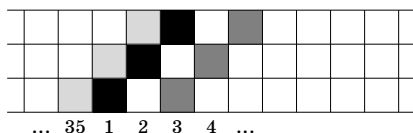
Первое решение. Предположим, такое случилось. В первый раз никакой хамелеон не мог отдать свой цвет обоим соседям — иначе он будет стоять между двумя хамелеонами этого же цвета и во второй раз будет вынужден окраситься в этот цвет вновь. Но никакой хамелеон не мог отдать свой цвет обоим соседям и во второй раз: если так произошло, то этот хамелеон минуту назад получил этот цвет от одного из соседей, значит, один из его соседей принимал этот цвет два раза — в начале и в конце. Поэтому каждый хамелеон каждый раз отдаёт свой цвет не более чем одному соседу, то есть количество хамелеонов каждого цвета не увеличивается. Но хамелеонов 35, а цветов 3, значит, изначально хамелеонов какого-то цвета не больше 11 (иначе суммарно хамелеонов хотя бы $12 \cdot 3 = 36$). Тогда хамелеонов этого цвета за всё время было не больше $11 \cdot 3 = 33$, и какой-то из хамелеонов точно в этот цвет не окрашивался.

Второе решение. Предположим, что такое могло быть. Пронумеруем хамелеонов по кругу от 1 до 35 и нарисуем таблицу из 3 строк и 35 столбцов, в которой каждому хамелеону соответствует столбец (будем считать таблицу зацик-

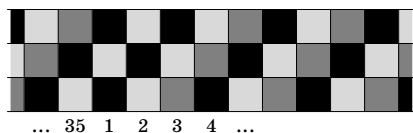
ленной, то есть после 35-го столбца будет вновь идти первый). Закрасим каждую клетку в первой (верхней) строке в изначальный цвет соответствующего хамелеона, во второй строке — в его цвет через минуту и в третьей строке — в итоговый цвет. Итоговый цвет каждый хамелеон мог позаимствовать от правого или от левого соседа, но, поскольку каждый хамелеон каждый цвет принимал ровно один раз, правый сосед мог получить этот цвет после первой минуты только от своего правого соседа, а левый — только от своего левого. То есть в таблице от каждой клетки третьей строки вверх идёт одна или две одноцветные диагонали (см. рис.).



Посмотрим на первого хамелеона. Без ограничения общности, пусть от его клетки в третьем ряду одноцветная диагональ идёт вправо. Посмотрим на хамелеона номер 3: в его столбце первая и третья клетки должны быть разного цвета, а значит, диагональ от его нижней клетки может идти только вправо. Рассуждая аналогично, получаем, что и у хамелеонов с номерами 5, 7, ..., 35 диагональ от нижней клетки идёт вправо.



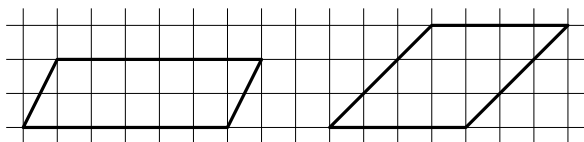
Но те же самые рассуждения можно применить к хамелеонам 35 и 2 — то есть и от нижних клеток хамелеона 2, а также хамелеонов 4, 6, ..., 34 диагонали могут идти только вправо! Значит, вся таблица раскрашена в диагональные «полоски». При этом диагонали соседних хамелеонов или хамелеонов, сидящих через одного, должны быть раз-



ного цвета: иначе один из хамелеонов два раза примет один и тот же цвет. Это означает, что цвета полосок повторяются (первый, второй, третий, первый, второй, третий, ...), тогда итоговый цвет 35-го хамелеона совпадает с итоговым цветом 2-го — противоречие.

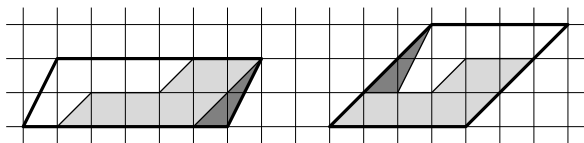
Комментарий. Из решения следует, что для выполнения желаемого условия количество хамелеонов должно делиться на 3; если изначальные цвета хамелеонов чередуются (красный, синий, зелёный, красный, синий, зелёный, ...) и каждый хамелеон каждый раз будет брать цвет от хамелеона справа, то условие задачи будет выполнено.

6. Разрежьте первый параллелограмм на три части и сложите из них второй.

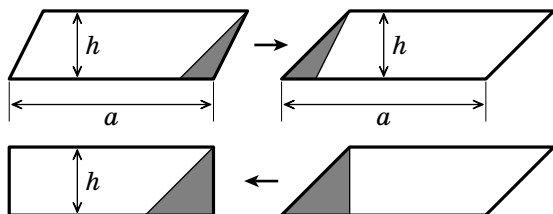


(Т. Голицева-Кутузова)

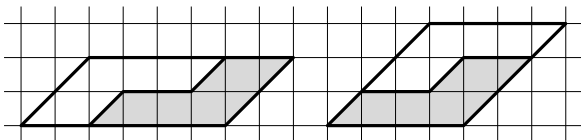
Ответ:



Комментарии. 1. Любой параллелограмм нетрудно разрезать на две части и сложить из них другой параллелограмм с такими же основанием a и высотой h . Отсюда, кстати, можно увидеть, что все такие параллелограммы имеют одинаковую площадь, и найти эту площадь: она равна площади прямоугольника $a \times h$. В частности, параллелограммы из условия имеют одинаковую площадь: $6 \times 2 = 4 \times 3$.



2. Если первую фигуру можно разрезать на части и сложить из них вторую (будем говорить «перекроить первую фигуру во вторую»), а вторую можно перекроить в третью, то и первую можно перекроить в последнюю (подумайте, почему!). Это помогает найти решение задачи: можно сначала перекроить первый параллелограмм в параллелограмм с нужным наклоном боковой стороны (как показано выше), а потом изменить пропорции параллелограмма, не меняя наклон боковой стороны.



Можно поступить и по-другому: сначала «перекосить» (действуя, как в первом комментарии) первый параллелограмм так, чтобы у него появилась сторона длины 4, потом перекосить этот параллелограмм во второй. Получится другое разрезание — вершины частей, правда, уже не будут лежать в узлах сетки.



3. Теорема Бойяи—Гёрвина говорит, что вообще любые два многоугольника одинаковой площади можно перекроить один в другой. (Доказательство можно прочитать в брошюре В. Г. Болтянского «Равновеликие и равноставленные фигуры». Важную роль в нём играют две идеи из предыдущих комментариев.) Но, вообще говоря, может потребоваться много частей. Например, чтобы перекроить квадрат 1×1 в прямоугольник $\frac{1}{100} \times 100$, понадобится разрезать квадрат примерно на 100 частей.

8 класс

1. Учительница продиктовала Вовочке угловые коэффициенты и свободные члены трёх разных линейных функций, графики которых параллельны. Невнимательный Вовочка при записи каждой из функций поменял местами угловой коэффициент и свободный член и построил графики получившихся функций. Сколько могло получиться точек, через которые проходят хотя бы два графика?

(А. Пешнин)

Ответ: у графиков 1 точка пересечения.

Решение. Уравнение линейной функции имеет вид $y = ax + b$, где a — угловой коэффициент, b — свободный член. График линейной функции — прямая. Графики двух линейных функций параллельны, когда угловой коэффициент у них одинаков, а свободные члены различны. Если поменять местами угловой коэффициент и свободный член, то у полученных функций свободный член будет одинаков, обозначим его c . Значит, при $x = 0$ эти функции принимают одно и то же значение $y = c$, т. е. их графики проходят через точку $(0; c)$. Так как две различные прямые не могут пересекаться более чем в одной точке, других точек пересечения нет.

2. На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Учитель 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться так, что все 10 раз состязание закончилось вничью (то есть суммы сил детей в командах были равны)?

(М. Евдокимов)

Ответ: да, могло.

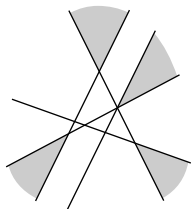
Решение. Пусть силы детей равны 1, 2, ..., 12. Предъявим 10 возможных разбиений детей на две команды с равными силами. Тогда при каждом таком разбиении будет зафиксирована ничья.

Разобьём детей на пары с суммарной силой 13: (1, 12), (2, 11), (3, 10), (4, 9), (5, 8), (6, 7). Пусть в первой команде всегда будет пара (1, 12) и ещё какие-то две из оставшихся пяти пар. При этом остальные три пары образуют

вторую команду. Тогда суммарная сила каждой команды будет равна $3 \cdot 13 = 39$.

Две пары из пяти возможных пар можно выбрать $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ возможными способами. Таким образом, мы получили 10 возможных разбиений на команды с равными силами.

3. Плоскость разбита на части несколькими прямыми, среди которых есть непараллельные. Те части, граница которых состоит из двух лучей, закрасили. После этого проведена ещё одна прямая. Докажите, что, независимо от положения новой прямой, по обе стороны от неё найдутся закрашенные точки.

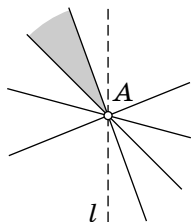


Пример расположения прямых (без последней прямой) изображен на рисунке.

(А. Устинов, А. Юран)

Решение. Введём систему координат так, чтобы новая прямая была осью Oy . Рассмотрим верхнюю среди самых левых точек пересечения нескольких прямых, назовём её A .

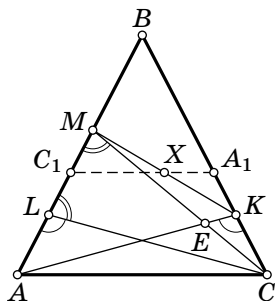
Рассмотрим лучи прямых, проходящих через A , лежащие в левой полуплоскости относительно вертикальной прямой l , проходящей через A , а также вертикальный луч, идущий вверх, если такой есть. Среди всех этих лучей выберем два соседних. Они будут образовывать закрашенный угол, так как иначе бы нашлась точка пересечения, лежащая левее A либо лежащая на l выше A . Поскольку хотя бы один из лучей лежит в левой полуплоскости относительно l , его точки будут лежать левее оси Oy .



Значит, левее Oy есть закрашенные точки. Аналогично можно доказать, что правее Oy есть закрашенные точки, рассмотрев верхнюю среди самых правых точек пересечения нескольких прямых.

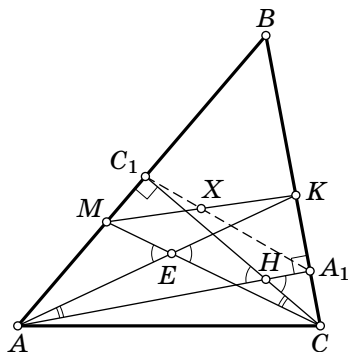
4. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и K . Отрезки CM и AK пересекаются в точке E . Оказалось, что $\angle MEA = \angle ABC$. Докажите, что середины всевозможных отрезков MK лежат на одной прямой. (М. Волчкевич)

Первое решение. Покажем, что X — середина MK — лежит на прямой A_1C_1 , соединяющей основания высот AA_1 и CC_1 . Без ограничения общности $AM > CK$ (если $AM \neq CK$), также считаем $K \neq C$. Так как $\angle AEM = \angle ABC$, из суммы углов четырёхугольника $MBKE$ получаем $\angle AMC + \angle AKC = 180^\circ$. Отметим на отрезке AB точку L такую, что $AL = CK$. Из равенства треугольников ALC и CKA (по двум сторонам и углу между ними: $AL = CK$, AC общая, $\angle LAC = \angle KCA$) получаем $\angle ALC = \angle AKC$. Тогда $\angle MLC = \angle LMC$, т. е. треугольник LMC равнобедренный. Значит, C_1 — середина LM . По обратной теореме Фалеса для прямых LK , AC и $\angle ABC$ получаем $LK \parallel AC$. Так как C_1X — средняя линия треугольника LMK , $C_1X \parallel LK$. Значит, $C_1X \parallel AC$. Заметив, что в равнобедренном треугольнике $C_1A_1 \parallel AC$, получаем $X \in C_1A_1$, что и требовалось. Случай, когда $K = C$, разбирается аналогично общему. В случае $AM = CK$ имеем $M = C_1$, $K = A_1$ и утверждение очевидно.



Второе решение. Обозначим $X = KM \cap C_1A_1$, где A_1, C_1 — основания высот AA_1, CC_1 . По теореме Менелая для треугольника MBK и секущей A_1C_1 получаем $\frac{MC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{KA_1} \cdot \frac{KX}{XM} = 1$. Так как $\angle AEM = \angle ABC$, из суммы углов четырёхугольника $MBKE$ получаем $\angle BMC = \angle AKC$. Треугольники AKA_1 и CMC_1 подобны по двум углам, отсюда $\frac{MC_1}{KA_1} = \frac{CC_1}{AA_1}$. Треугольники ABA_1 и CBC_1 подобны по двум углам, отсюда $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{AA_1}{CC_1}$. Поделив первое равенство с отношениями сторон на второе и третье, получим $KX = XM$, т. е. середина отрезка MK лежит на прямой A_1C_1 . (Если MK совпадает с C_1A_1 , то утверждение очевидно. В противном случае из того, что $\angle BMC = \angle AKC$, следует, что из точек M, K одна

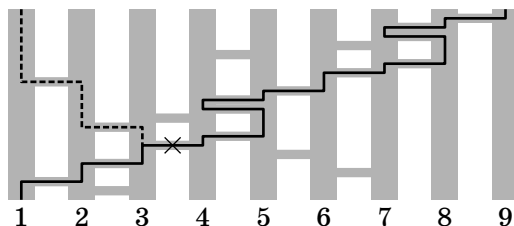
лежит на отрезке, а другая на продолжении BC_1 и BA_1 . Без ограничения общности мы полагаем, что M лежит на продолжении отрезка, а K на самом отрезке.)



Комментарий. Утверждение задачи верно и для произвольного треугольника ABC . В частности, мы не пользовались равнобедренностью во втором решении.

5. В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две из которых не находятся на одной высоте. Жук ползёт снизу вверх; когда он встречает палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого столбика, то он закончит свой путь на девятом столбике. Всегда ли можно убрать одну из палочек так, чтобы жук в конце пути оказался наверху пятого столбика?

Например, если палочки расположены как на рисунке, то жук будет ползти по сплошной линии. Если убрать третью палочку на пути жука, то он поползёт по пунктирной линии.



(Г. Караваев)

Ответ: да, всегда.

Решение. Посадим по жуку на основание каждого столбика и отправим ползти вверх с одинаковой постоянной скоростью по нашим правилам (при этом по палочкам они будут переползать мгновенно). Тогда на горизонтальных палочках жуки будут меняться местами, и никакие два жука не окажутся на одном столбике в одно и то же время. Значит, на вершине каждого из столбиков в конце будет по жуку.

Назовём жука, стартовавшего с первого столбика, *красным*, а того, кто финиширует на вершине пятого столбика, — *зелёным*. Заметим, что красный жук стартует левее зелёного, а финиширует правее. Значит, хотя бы на одной из палочек они меняются местами. Уберём эту палочку. После этого красный жук поползёт по маршруту зелёного, то есть закончит на пятом столбике.

Комментарий. Ту же идею можно было оформить по-другому. Изначально посадим синего жука на вершину пятого столбика, и пусть он ползёт сверху вниз. Его траектория пересечётся с траекторией красного жука по горизонтальной палочке. Эту палочку и уберём.

6. Вася выбрал 100 различных натуральных чисел из множества 1, 2, 3, ..., 120 и расставил их в некотором порядке вместо звёздочек в выражении (всего 100 звёздочек и 50 знаков корня)

$$\sqrt{(*+*) \cdot \sqrt{(*+*) \cdot \sqrt{\dots \sqrt{*+*}}}.$$

Могло ли значение полученного выражения оказаться целым числом?

(М. Евдокимов)

Ответ: да, могло.

Решение. Проще всего построить пример справа налево по следующей схеме. Сначала вместо нескольких последних звёздочек подбираются числа так, чтобы после извлечения очередного корня получалось целое число n (они образуют так называемый «хвост» нашего выражения). Все дальнейшие суммы звёздочек также делаются равными n (их мы можем заполнить, если выбрать n таким образом, чтобы количество доступных пар чисел, дающих в сумме n ,

было достаточно большим). Тогда значение выражения будет равно n .

В следующем выражении через A обозначен «хвост» — цепочка вложенных корней, значение которой равно n^2 . Таким образом, $\sqrt{A} = n$ и всё выражение равно n :

$$n = \sqrt{n \sqrt{n \dots \sqrt{n \sqrt{A}}}}.$$

Например, можно взять $n = 120$. При этом сделать

$$A = (101 + 99) \sqrt{(120 + 96) \sqrt{(100 + 44) \sqrt{(1 + 15)}}} = 120^2.$$

Теперь осталось сделать все оставшиеся 46 сумм звёздочек равными 120.

Всего есть 59 представлений числа 120 в виде суммы двух разных натуральных чисел ($1+119, 2+118, \dots, 59+61$). Из них недоступными оказываются те, что содержат числа 101, 99, 96, 100, 44, 1 и 15, т. е. 7 представлений. Поэтому 52 представления оказываются доступными. Выберем из них любые 46 представлений и поставим вместо оставшихся звёздочек.

9 класс

1. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{c}{d} + \frac{d}{c}.$$

Докажите, что произведение каких-то двух чисел из a, b, c, d равно произведению двух других.

(А. Доледенюк, В. Ретинский)

Первое решение. Перепишем условие в виде

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{c}{d} + \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{d}{c} = \frac{c}{d} - \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{ac - bd}{bc} = \frac{ac - bd}{ad}.$$

Если числитель дробей равен нулю, то $ac = bd$. В противном случае, если у равных дробей равны числители, то у них равны и знаменатели, то есть $bc = ad$.

Второе решение. Пусть $x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{c}{d}$. Если $x_1 = x_2$, то $ad = bc$, поэтому далее будем считать, что $x_1 \neq x_2$. Обозначим значение левой и правой части равенства через t . Тогда условие переписывается в виде

$$x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2} = t.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $f(x) = t$. Перепишем это уравнение в виде

$$f(x) = t \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0.$$

Тогда по теореме Виета

$$x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 1 \Leftrightarrow ac = bd.$$

2. См. задачу 2 для 8 класса (с. 13).

3. Петя загадал положительную несократимую дробь $x = \frac{m}{n}$. За один ход Вася называет положительную несократимую дробь y , не превосходящую 1, и Петя в ответ сообщает Васе числитель несократимой дроби, равной сумме $x + y$. Как Васе за два хода гарантированно узнать x ?

(М. Дидин)

Первое решение. Как известно, для целых чисел a , b и k выполнено равенство

$$\text{НОД}(a + kb, b) = \text{НОД}(a, b).$$

Пусть первым ходом Вася назовёт дробь $y = \frac{1}{1}$. Петя вычислит дробь $x + y = \frac{m+n}{n}$. Поскольку числа m и n взаимно просты, то

$$\text{НОД}(m + n, n) = \text{НОД}(m, n) = 1,$$

то есть дробь несократима, и Петя сообщит число $a = m + n$.

Пусть вторым ходом Вася назовёт дробь $y = \frac{1}{a}$. Петя вычислит дробь $x + y = \frac{am + n}{an}$. Эта дробь несократима, поскольку

$$\text{НОД}(am + n, a) = \text{НОД}(n, a) = \text{НОД}(n, m + n) = 1$$

и аналогично $\text{НОД}(am + n, n) = 1$. Следовательно, Петя сообщит число $b = am + n$.

Поделив b на a с остатком, Вася узнает n . Вычислив разность $a - n$, Вася узнает m . Таким образом, Вася сможет узнать загаданную дробь.

Второе решение. Как и в первом решении, пусть Вася первым ходом назовёт дробь $y = \frac{1}{1}$ и получит в ответ от Пети число $a = m + n$.

Пусть вторым ходом Вася назовёт дробь $y = \frac{1}{(a!)^2}$. Петя вычислит дробь

$$x + y = \frac{m \cdot \frac{(a!)^2}{n} + 1}{(a!)^2} = \frac{m \cdot a! \cdot \frac{a!}{n} + 1}{(a!)^2}.$$

Допустим, дробь можно сократить на какое-то простое число p . Тогда p — это делитель числа $a!$. Но $m \cdot a! \cdot \frac{a!}{n}$ делится на p , поэтому весь числитель на p не делится, противоречие.

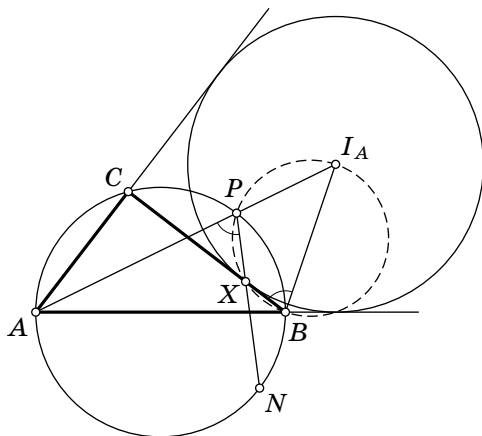
Следовательно, Петя сообщит Васе число $b = m \cdot \frac{(a!)^2}{n} + 1$.

Вычислив неполное частное при делении b на $a!$, Вася узнает число $m \cdot \frac{a!}{n}$. Поделив это число на $a!$, Вася узнает $\frac{m}{n}$, то есть загаданную дробь.

Комментарий. Существует множество других примеров дробей, которые может назвать Вася. Например, дроби $\frac{1}{1}$ и $\frac{1}{2}$.

4. На описанной окружности треугольника ABC отметили середины дуг BAC и CBA — точки M и N соответственно, и середины дуг BC и AC — точки P и Q соответственно. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке A_1 и продолжений сторон AC и AB . Окружность ω_2 касается стороны AC в точке B_1 и продолжений сторон BA и BC . Оказалось, что A_1 лежит на отрезке NP . Докажите, что B_1 лежит на отрезке MQ . (А. Доледенко)

Первое решение. Временно забудем о том, что точка A_1 лежит на отрезке NP . Пусть I_A — центр ω_1 . Обозначим через X точку пересечения прямых BC и PN .



Так как I_A лежит на биссектрисе внешнего угла B , то $\angle CBI_A = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$. Так как I_A лежит на биссектрисе угла A , то точки A, P, I_A лежат на одной прямой. Тогда

$$\angle APN = \frac{\widehat{AN}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{4} = \frac{360^\circ - \widehat{AC}}{4} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

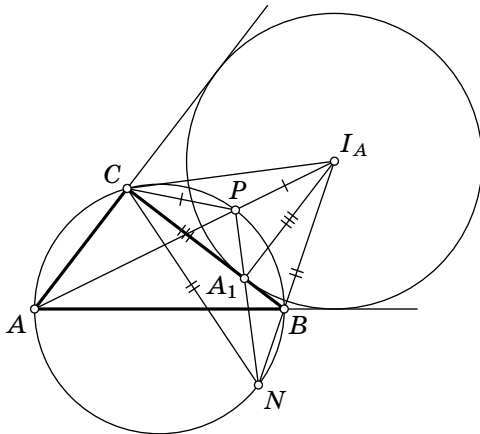
Таким образом, $\angle CBI_A = \angle APN$, то есть четырёхугольник $I_A P X B$ вписанный.

Вернёмся к решению задачи. Точки X и A_1 совпадают тогда и только тогда, когда $\angle BXI_A = \angle BA_1I_A = 90^\circ$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что $\angle BPI_A = 90^\circ$. Но тогда $\angle ACB = \angle APB = 90^\circ$. Проведя аналогичные рассуждения, получим, что принадлежность точек Q, B_1, M одной прямой также эквивалентна условию, что угол C прямой.

Второе решение. Как и в первом решении, временно забудем о том, что точка A_1 лежит на отрезке NP . Воспользуемся двумя известными фактами.

Лемма о трезубце. Точка P равноудалена от точек B , C , I_A и центра вписанной окружности треугольника ABC .

Внешняя лемма о трезубце. Точка N равноудалена от точек A, C, I_A и центра окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон CA и CB .



Из этих утверждений следует, что $NC = NI_A$ и $PC = PI_A$, а значит, PN является серединным перпендикуляром к отрезку CI_A .

Вернёмся к решению задачи. Точка A_1 лежит на прямой PN тогда и только тогда, когда $CA_1 = A_1I_A$, то есть треугольник CA_1I_A является равнобедренным и прямоугольным. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $\angle A_1CI_A = 45^\circ$, что эквивалентно тому, что $\angle BCA = 90^\circ$.

Осталось, как и в концовке первого решения, сослаться на то, что аналогично устанавливается эквивалентность утверждений, что $\angle BCA = 90^\circ$ и что точки Q, B_1, M лежат на одной прямой.

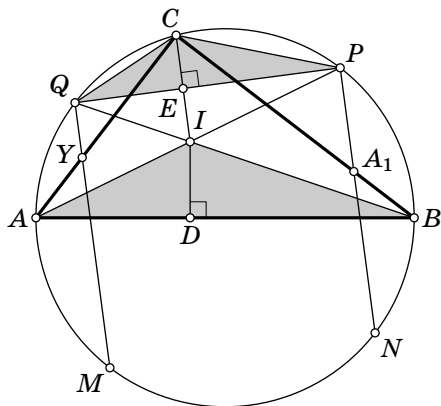
Третье решение. Приведём решение, в котором не используется в качестве вспомогательного факта, что угол C прямой.

Пусть I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, D — точка касания этой окружности со стороной AB , E — точка пересечения отрезков CI и PQ . Обозначим точку

пересечения прямых AC и MQ через Y . Требуется доказать, что точки B_1 и Y совпадают.

Мы будем пользоваться следующими известными фактами.

- Прямые NP и MQ параллельны биссектрисе угла C , а прямая PQ — перпендикулярна.
- Выполнены равенства $AD = CB_1$ и $BD = CA_1$.



Поскольку $\angle CPQ = \angle CBQ = \angle IBA$ и аналогично $\angle CQP = \angle IAB$, то треугольники IBA и CPQ подобны. Тогда D и E — соответствующие точки в подобных треугольниках IBA и CPQ , поэтому $PE/EQ = BD/DA$. Так как длина отрезка PE равна расстоянию между параллельными прямыми CI и NP , то

$$PE = CA_1 \cdot \cos \frac{180^\circ - \angle C}{2} = CA_1 \cdot \sin \frac{\angle C}{2}.$$

Аналогично $QE = CY \cdot \sin \frac{\angle C}{2}$, поэтому

$$\frac{CA_1}{CY} = \frac{PE}{EQ} = \frac{BD}{DA}.$$

Подставив $CA_1 = BD$, получим

$$\frac{CA_1}{CY} = \frac{BD}{DA} \Leftrightarrow \frac{BD}{CY} = \frac{BD}{DA} \Leftrightarrow CY = DA.$$

Но $DA = CB_1$, то есть $CB_1 = CY$. Следовательно, точки Y и B_1 совпадают.

Комментарии. 1. В случае прямого угла C прямая NP проходит не только через точку A_1 , но и через точку касания ω_1 с продолжением стороны AC .

2. Верно аналогичное утверждение для точек касания вписанной окружности с катетами. А именно, прямая PQ проходит через точки касания вписанной в треугольник ABC окружности с катетами AC и BC .

5. См. задачу 5 для 8 класса (с. 16).

6. На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется *неудачной*, если для каждого натурального k от 1 до 99 сумма чисел на верхних k карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить? (А. Кушнир)

Ответ: 98!.

Решение. Пример. Пусть на карточках написаны числа $\sqrt{2}, 1, 2, \dots, 98$. Тогда в неудачной стопке карточка $\sqrt{2}$ должна находиться сверху, а остальные карточки можно расположить любым из 98! способов. В этом случае всякая сумма чисел на нескольких верхних карточках будет иметь вид $\sqrt{2} + n$, где n — натуральное число, то есть будет иррациональна.

Оценка. Разобьём все стопки карточек на 98! групп, в каждой из которых одна стопка получается из другой циклической перестановкой (то есть перекалыванием нескольких верхних карточек вниз стопки). Каждая группа состоит из 99 стопок. Докажем, что каждая группа содержит хотя бы одну неудачную стопку.

Предположим, что нашлась группа без неудачных стопок. Выберем одну из стопок и расположим карточки из неё по кругу в том же порядке, в котором они лежат в стопке: $a_1, a_2, \dots, a_{99}$. Тогда все стопки из группы будут иметь вид $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{99}, a_1, \dots, a_{i-1}$ для i от 1 до 99.

Начнём идти от карточки a_1 по часовой стрелке до тех пор, пока сумма чисел $a_1 + a_2 + \dots + a_j$ на пройденных карточках не станет рациональной. Далее начнём идти от a_{j+1} до тех пор, пока сумма чисел на пройденных карточках не станет рациональной. Такой момент настанет, потому что соответствующая стопка, начинающаяся с a_{j+1} , не является неудачной. Прделаем описанную операцию 100 раз. По

принципу Дирихле найдётся карточка a_t , с которой начинали отсчитывать сумму хотя бы дважды. Оставим только шаги процесса между первым и вторым отсчитыванием от карточки a_t (включая первое, но не включая второе).

Посмотрим на сумму S пройденных чисел (каждое число считается столько раз, сколько его прошли). С одной стороны, S рационально, так как мы брали отрезки карточек с рациональной суммой. С другой стороны, мы начали с карточки a_t , а закончили карточкой a_{t-1} , то есть прошли несколько полных кругов. Из этого следует, что сумма всех пройденных чисел будет равна nS' , где n — количество пройденных кругов, а S' — сумма чисел на всех карточках. Однако S' по условию иррационально, откуда nS' также иррационально. Противоречие.

Таким образом, в каждой группе есть хотя бы одна неудачная стопка. Тогда общее количество неудачных стопок не меньше, чем $99! \cdot \frac{1}{99} = 98!$.

Комментарий. Существуют и другие примеры. Например, можно взять карточки

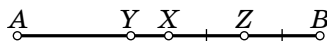
$$1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, \dots, 50 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, \dots, 49 - \sqrt{2}.$$

Назовём первые 50 карточек *положительными*, а остальные — *отрицательными*. В неудачной стопке, состоящей из этих карточек, первая карточка должна быть положительной и для любого k среди первых k карточек положительных карточек должно быть больше, чем отрицательных. Количество неудачных стопок в этом случае также будет равно $98!$.

1. Петя и Вася играют на отрезке $[0; 1]$, в котором отмечены точки 0 и 1. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждый ход игрок отмечает ранее не отмеченную точку отрезка. Если после хода очередного игрока нашлись три последовательных отрезка между соседними отмеченными точками, из которых можно сложить треугольник, то сделавший такой ход игрок объявляется победителем, и игра заканчивается. Получится ли у Пети гарантированно победить? (Б. Бутырин)

Ответ: да, получится.

Решение. Первым ходом Петя отмечает середину отрезка AB — точку X . Пусть Вася сходил, без потери общности, в левый отрезок точкой Y . Образуются три отрезка, один из которых (а именно XB) равен сумме двух других, поэтому Вася не сможет выиграть на первом своём ходу, и игра продолжится. Далее Пете остаётся отметить середину правого отрезка Z .



Тогда отрезки YX , XZ и ZB образуют треугольник: в сумме XZ и ZB , как половина AB , больше YX , а неравенства $XZ < YX + ZB$ и $ZB < YX + XZ$ верны в силу равенства XZ и ZB .

2. Докажите, что среди вершин выпуклого девятиугольника можно найти три, образующие тупоугольный треугольник, ни одна сторона которого не совпадает со сторонами девятиугольника. (А. Юран)

Решение. Обозначим девятиугольник как $A_1A_2\dots A_9$. Рассмотрим четырёхугольники $A_2A_4A_6A_8$ и $A_1A_4A_6A_8$. Заметим, что оба прямоугольниками они быть не могут, так как прямоугольник однозначно задаётся тремя вершинами. Значит, так как сумма углов в четырёхугольнике равна 360° , один из них будет иметь тупой угол, который и даст нам искомый треугольник.

Комментарий. Можно показать, что всегда найдётся удовлетворяющий условию задачи треугольник, один из углов которого не меньше 100° .

3. В клуб любителей гиперграфов в начале года записались n попарно незнакомых школьников. За год клуб провёл 100 заседаний, причём каждое заседание посетил хотя бы один школьник. Два школьника познакомились, если было хотя бы одно заседание, которое они оба посетили. В конце года оказалось, что количество знакомых у каждого школьника не меньше, чем количество заседаний, которые он посетил. Найдите минимальное значение n , при котором такое могло случиться. (Д. Метелев)

Ответ: 11.

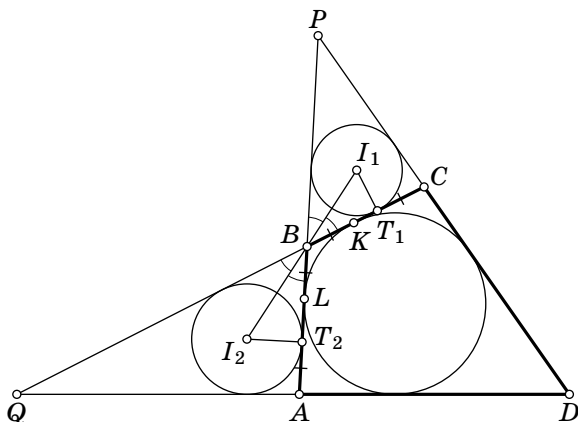
Решение. Оценка. Рассмотрим самого активного школьника, посетившего наибольшее количество заседаний, пусть их было k . Так как каждое заседание посетил хотя бы кто-то, то $nk \geq 100$. С другой стороны, по условию этот школьник познакомился с хотя бы k другими участниками клуба, значит, мы нашли уже хотя бы $k + 1 \geq \frac{100}{n} + 1$ школьника, хотя их всего n . Таким образом, $n \geq \frac{100}{n} + 1$, откуда $n \geq 11$.

Пример. Пусть первое заседание посетят все 11 школьников, а остальные заседания разобьём на 11 групп по 9 заседаний, их посетят по одному школьнику. Скажем, что школьник под номером i посетил заседания из i -й группы, а также самое первое (таким образом, каждый участник посетил 10 заседаний). Тогда каждый школьник познакомился с остальными десятью на самом первом заседании.

Комментарий. Можно доказать аналогичную оценку в более общей ситуации: для N заседаний наименьшее возможное число школьников при данных условиях равно $\lceil \sqrt{N} \rceil + 1$.

4. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$ с тупым углом ABC . Лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи DA и CB — в точке Q . Докажите, что $|AD - CD| \geq |r_1 - r_2|$, где r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей треугольников PBC и QAB . (Л. Шатунов)

Решение. Пусть T_1 и T_2 — точки касания вписанных окружностей треугольников PBC и QAB со сторонами BC и AB соответственно, а K и L — точки касания вписанной в $ABCD$ окружности со сторонами BC и AB соответственно (см. рис.).



По свойству описанного четырёхугольника $AB + CD = BC + AD$, поэтому $|AD - CD| = |AB - BC|$. Из треугольников BI_1T_1 и BI_2T_2 имеем, что $r_1 = BT_1 \cdot \operatorname{tg} \angle CBI_1$, а $r_2 = BT_2 \cdot \operatorname{tg} \angle CBI_1$, откуда

$$|r_1 - r_2| = |BT_1 - BT_2| \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle PBC}{2} \leq |BT_1 - BT_2|,$$

так как $\angle PBC < 90^\circ$. Заметим, что $BL = BK$ как отрезки касательных, а $BK = CT_1$, ведь T_1 и K — точки касания вписанной и внеписанной окружностей треугольника PBC со стороной BC , аналогично $BL = AT_2$. Тогда $|BC - AB| = |BT_1 - BT_2 + CT_1 - AT_2| = |BT_1 - BT_2| \geq |r_1 - r_2|$.

5. Будем называть натуральное число N *сильно кубическим*, если существует такой приведённый кубический многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(f(N))) = 0$, а $f(N)$ и $f(f(N))$ не равны 0. Верно ли, что все числа, большие 20^{24} , сильно кубические? (Д. Бродский)

Ответ: нет, неверно.

Решение. Пусть число N является сильно кубическим. Тогда существует такой многочлен f с целыми коэффициентами, что $f(N) = N_1$, $f(N_1) = N_2$, $f(N_2) = 0$, при этом все числа N , N_1 , N_2 , 0 попарно различны, иначе N_1 или N_2 равно 0. Для любых целых x и y выполняется $f(x) - f(y) : x - y$,

поэтому имеем:

$$\begin{cases} N_1 - N_2 : N - N_1, \\ N_2 - 0 : N_1 - N_2, \\ N_1 - 0 : N - N_2. \end{cases}$$

Обозначим $r_0 = N - N_1$. Из первой делимости следует, что $N_1 - N_2 = r_0 r_1$ для некоторого целого r_1 . Из второй делимости $N_2 - 0 = r_0 r_1 r_2$ для некоторого целого r_2 . В этих обозначениях $N - N_2 = r_0(r_1 + 1)$, $N_1 - 0 = r_0 r_1(r_2 + 1)$, поэтому третья делимость означает, что $r_0 r_1(r_2 + 1) : r_0(r_1 + 1)$ или $r_1(r_2 + 1) : r_1 + 1$, что равносильно $r_2 + 1 : r_1 + 1$, поскольку r_1 и $r_1 + 1$ взаимно просты. Значит, $r_2 = k(r_1 + 1) - 1$ для некоторого целого k и

$$\begin{aligned} N &= (N - N_1) + (N_1 - N_2) + (N_2 - 0) = \\ &= r_0 + r_0 r_1 + r_0 r_1(k(r_1 + 1) - 1) = r_0(1 + r_1(r_1 + 1)k). \end{aligned}$$

Заметим, что $r_1(r_1 + 1)$ всегда чётно, и, следовательно, $1 + r_1(r_1 + 1)k$ — нечётный сомножитель числа N . Далее будем рассматривать числа вида $N = 2^l$, поскольку в этом случае

$$1 + r_1(r_1 + 1)k = \pm 1.$$

Если $1 + r_1(r_1 + 1)k = 1$, имеем $r_1(r_1 + 1)k = 0$. Поскольку $N_1 - N_2 = r_0 r_1 \neq 0$, имеем либо $r_1 = -1$, либо $k = 0$, т. е. $r_2 = -1$. В первом случае $N = N_2$, и в обоих случаях $N_1 = 0$, что противоречит условию.

Значит, $r_0 = -N$, $1 + r_1(r_1 + 1)k = -1$, $r_1(r_1 + 1)k = -2$, т. е. $k = -1$, при этом $r_1 = -2$ или $r_1 = 1$.

Если $r_1 = -2$, то $r_2 = 0$ и $N_2 = 0$, что противоречит условию.

Если $r_1 = 1$, имеем $N_1 = 2N$, $N_2 = 3N$. Разберёмся, возможно ли это при целых коэффициентах f . Поскольку $f(3N) = 0$, из теоремы Безу имеем $f(x) = (x - 3N)(x^2 + ax + b)$ для некоторых целых a, b . Найдём их из равенств

$$(N - 3N)(N^2 + aN + b) = 2N$$

и

$$(2N - 3N)((2N)^2 + a(2N) + b) = 3N.$$

Упрощая их, получаем $N^2 + aN + b = -1$, $4N^2 + 2aN + b = -3$, из них находим $a = \frac{-2 - 3N^2}{N}$, $b = 1 + 2N^2$. Таким образом, при $N = 2^l > 2$ коэффициент a нецелый, т. е. такое число N не является сильно кубическим.

Комментарий. Можно показать, что число является сильно кубическим тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $r_0(1 + r_1(r_1 + 1)k)$, при условии что $k - 1$ делится на r_0 , а числа k , r_0 , r_1 , $r_1 + 1$ и $k(r_1 + 1) - 1$ не равны нулю. В частности, все нечётные числа являются сильно кубическими.

6. См. задачу 6 для 9 класса (с. 24).

11 класс, первый день

1. У математика есть 19 различных гирь, массы которых в килограммах равны $\ln 2, \ln 3, \ln 4, \dots, \ln 20$, и абсолютно точные двухчашечные весы. Он положил несколько гирь на весы так, что установилось равновесие. Какое наибольшее число гирь могло оказаться на весах? (М. Евдокимов)

Ответ: 15.

Решение. Сумма логарифмов положительных чисел равна логарифму их произведения, поэтому будем уравнивать произведения двух непересекающихся наборов чисел из множества $\{2, 3, \dots, 20\}$. Разложим натуральные числа от 2 до 20 на простые множители:

$$2, 3, 2^2, 5, 2 \cdot 3, 7, 2^3, 3^2, 2 \cdot 5, 11, 2^2 \cdot 3, 13, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5, 2^4, \\ 17, 2 \cdot 3^2, 19, 2^2 \cdot 5.$$

Числа 11, 13, 17, 19 встречаются в этих разложениях ровно по одному разу, поэтому их следует исключить. Таким образом, более 15 гирь оказаться на весах не может.

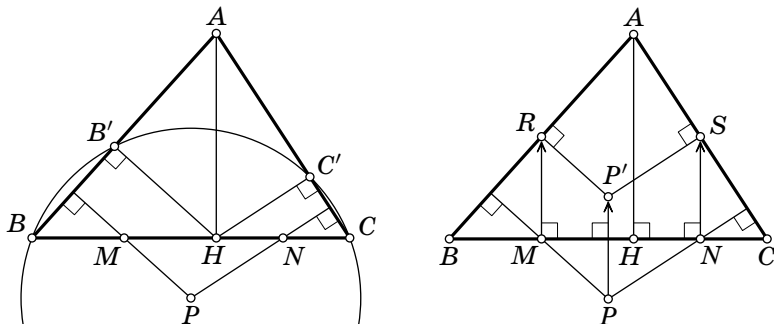
Покажем, что можно уравновесить 15 гирь. Заметим, что простые множители 2, 3, 5 и 7 встречаются в выписанных разложениях чётное число раз (18, 8, 4 и 2 соответственно). Приведём один из возможных примеров равенства произведений:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 18 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 20.$$

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH . Точки M и N — середины отрезков BH и CH . Докажите, что точка пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, равноудалена от точек B и C . (И. Михайлов)

Первое решение. Обозначим точку пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, через P , а точки, симметричные B и C относительно прямых MP и NP , через B' и C' . Тогда прямые MP и NP — серединные перпендикуляры к отрезкам BB' и CC' , поэтому достаточно доказать, что четырёхугольник $BB'C'C$ — вписанный. Заметим, что MP и NP содержат

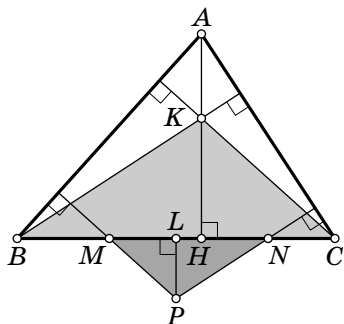
средние линии треугольников $BB'H$ и $CC'H$, параллельные сторонам $B'H$ и $C'H$ соответственно. Значит, $HB' \perp AB$, $HC' \perp AC$. Четырёхугольник $HB'AC'$ вписан в окружность, построенную на AH как на диаметре, поэтому $\angle B'CA = \angle B'HA$ по свойству вписанных углов. При этом $\angle B'HA = 90^\circ - \angle HAB' = \angle ABC$. Значит, четырёхугольник $BB'C'C$ вписанный, что и требовалось доказать.



Второе решение. Обозначим точку пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, через P , а середины сторон AB и AC треугольника ABC через R и S . Отрезки RM и SN являются средними линиями треугольников BAH и CAH , параллельными общей стороне AH этих треугольников. Поэтому отрезки RM и SN равны, параллельны и оба перпендикулярны прямой BC . Параллельно перенесём точку P на вектор $\vec{MR}$ и обозначим полученную точку P' . Тогда четырёхугольники $MRP'P$ и $NSP'P$ являются параллелограммами. Поэтому прямая $P'R$ параллельна прямой PM , а значит, перпендикулярна AB . Аналогично прямая $P'S$ перпендикулярна AC . Тогда P' является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AB и AC треугольника ABC , т. е. совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC . В частности, точка P' лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC . Следовательно, точка P также лежит на серединном перпендикуляре к BC , так как $P'P \perp BC$ по построению.

Третье решение. Обозначим точку пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, через P , а точку пересечения высот тре-

угольника ABC — через K . Тогда заметим, что треугольники BKC и NPM подобны по двум углам. Действительно, $\angle MNP = 90^\circ - \angle BCA = \angle CBK$. Аналогично, выполнено равенство $\angle NMP = \angle BCK$. Также заметим, что коэффициент подобия этих треугольников равен 2, поскольку $\frac{BC}{MN} = 2$. Опустим из P перпендикуляр PL на BC . Тогда из доказанного подобия следует, что $\frac{HC}{LM} = 2$, т. е. $LM = NH$. Следовательно, $BL = BM + ML = BM + NH = \frac{1}{2}BC$, а значит, P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC , откуда следует требуемое.



3. Имеется кучка из 100 камней. Двое играют в следующую игру. Первый игрок забирает 1 камень, потом второй может забрать 1 или 2 камня, потом первый может забрать 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня, и так далее. Выигрывает тот, кто забирает последний камень. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (Л. Смирнова)

Ответ: первый игрок.

Решение. Докажем, что для любого натурального $n \leq 10$ первый игрок на своём n -м ходе может добиться, чтобы количество забранных из кучки камней равнялось n^2 , и второй игрок не сможет ему помешать. Доказательство проведём индуктивно. В свой первый ход первый игрок забирает один камень, т. е. число забранных камней равно 1^2 . Пусть в свой n -й ход первому игроку удалось сделать так, чтобы количество забранных камней равнялось n^2 . В свой n -й ход второй игрок может взять от 1 до $2n$ камней. Поскольку $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, после его хода общее количество забранных камней будет больше n^2 и меньше $(n+1)^2$.

Первый игрок в свой следующий ход может взять от 1 до $2n + 1$ камня и точно сможет обеспечить $(n + 1)^2$ забранных камней независимо от предыдущего хода второго игрока. Таким образом, поскольку $100 = 10^2$, побеждает первый игрок: ему достаточно каждый раз забирать такое число камней, чтобы общее число забранных камней было точным квадратом, и на своём 10-м ходе он возьмёт последний камень.

Комментарий. Если исходная кучка содержит от n^2 до $n^2 + n - 1$ камней, то выигрышная стратегия есть у первого игрока, а если от $n^2 + n$ до $n^2 + 2n$, то у второго.

4. Дан многочлен степени $n \geq 1$ с целыми ненулевыми коэффициентами, каждый из которых является его корнем. Докажите, что модули коэффициентов этого многочлена не превосходят 2. (Л. Шатунов)

Решение. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — данный в условии многочлен. По условию числа a_k , $k = 0, 1, \dots, n$, являются его корнями:

$$P(a_k) = a_n a_k^n + a_{n-1} a_k^{n-1} + \dots + a_1 a_k + a_0 = 0.$$

Тогда a_0 делится на a_k при любом $k = 1, 2, \dots, n$. Поэтому достаточно доказать, что $|a_0| \leq 2$.

Имеем

$$\begin{aligned} 0 = P(a_0) &= a_n a_0^n + a_{n-1} a_0^{n-1} + \dots + a_1 a_0 + a_0 = \\ &= a_0 (a_n a_0^{n-1} + a_{n-1} a_0^{n-2} + \dots + a_2 a_0 + a_1 + 1), \end{aligned}$$

значит, $a_1 + 1$ делится на a_0 . Как показано выше, a_0 делится на a_1 . Значит, $a_1 + 1$ делится на a_1 . Поскольку эти числа взаимно просты, это возможно только в случае, если $a_1 = \pm 1$.

Если $a_1 = 1$, то $a_1 + 1 = 2$ делится на a_0 , и утверждение доказано.

Пусть теперь $a_1 = -1$. Докажем индукцией по m , что $a_0 a_{2m-1} + a_{2m-2} = 0$ и $a_{2m-1} = \pm 1$ при всех $m = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

База ($m = 1$) уже доказана: $a_0 a_1 + a_0 = a_0(a_1 + 1) = 0$, $a_1 = -1$.

Пусть равенство $a_0 a_{2m-1} + a_{2m-2} = 0$ выполнено при всех $m = 1, 2, \dots, k$. Тогда многочлен $P(x)$ имеет вид

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{2k+1} x^{2k+1} + a_{2k} x^{2k} \pm \\ \pm (x^{2k-1} - a_0 x^{2k-2}) \pm (x^{2k-3} - a_0 x^{2k-4}) \pm \dots \pm (x - a_0).$$

При $x = a_0$ получаем

$$0 = P(a_0) = a_n a_0^n + a_{n-1} a_0^{n-1} + \dots + a_{2k+1} a_0^{2k+1} + a_{2k} a_0^{2k} = \\ = a_0^{2k} (a_n a_0^{n-2k} + a_{n-1} a_0^{n-2k-1} + \dots + a_{2k+1} a_0 + a_{2k}).$$

Следовательно, a_{2k} делится на a_0 . Как показано выше, a_0 делится на a_{2k} , поэтому $a_{2k} = \varepsilon a_0$, где $\varepsilon = \pm 1$. Тогда

$$0 = a_n a_0^{n-2k} + a_{n-1} a_0^{n-2k-1} + \dots + a_{2k+1} a_0 + a_{2k} = \\ = a_0 (a_n a_0^{n-2k-1} + a_{n-1} a_0^{n-2k-2} + \dots + a_{2k+1} + \varepsilon).$$

Значит, $a_{2k+1} + \varepsilon$ делится на a_0 . Как показано выше, a_0 делится на a_{2k+1} . Значит, $a_{2k+1} + \varepsilon$ делится на a_{2k+1} . Поскольку эти числа взаимно просты, это возможно только в случае, если $a_{2k+1} = \pm 1$.

Если $a_{2k+1} = \varepsilon$, то $a_{2k+1} + \varepsilon = 2\varepsilon = \pm 2$ делится на a_0 , и утверждение доказано.

Если $a_{2k+1} = -\varepsilon$, то $a_0 a_{2k+1} + a_{2k} = a_0 (-\varepsilon + \varepsilon) = 0$ и $a_{2k+1} = -\varepsilon = \pm 1$ — переход доказан.

Если $n = 2s$ чётно, то из доказанного утверждения следует, что многочлен $P(x)$ имеет вид

$$P(x) = a_{2s} x^{2s} \pm (x^{2s-1} - a_0 x^{2s-2}) \pm (x^{2s-3} - a_0 x^{2s-4}) \pm \dots \\ \dots \pm (x - a_0).$$

При $x = a_0$ получаем $0 = P(a_0) = a_{2s} a_0^{2s}$, что по условию невозможно.

Если $n = 2s + 1$ нечётно, то из доказанного утверждения следует, что многочлен $P(x)$ имеет вид

$$P(x) = \varepsilon_{s+1} (x^{2s+1} - a_0 x^{2s}) + \varepsilon_s (x^{2s-1} - a_0 x^{2s-2}) + \dots + \varepsilon_1 (x - a_0),$$

где ε_k — целые числа, по модулю равные 1, при всех $k = 1, 2, \dots, s + 1$.

Как было показано выше, $\varepsilon_1 = -1$, поэтому из условия следует, что число -1 является корнем многочлена $P(x)$.

Тогда

$$\begin{aligned} 0 = P(-1) &= \varepsilon_{s+1}((-1)^{2s+1} - a_0(-1)^{2s}) + \\ &+ \varepsilon_s((-1)^{2s-1} - a_0(-1)^{2s-2}) + \dots + \varepsilon_1(-1 - a_0) = \\ &= (\varepsilon_{s+1} + \varepsilon_s + \dots + \varepsilon_1)(-1 - a_0) = 0. \end{aligned}$$

Если значение первой скобки отлично от нуля, то из этого равенства следует, что $a_0 = -1$, и утверждение доказано.

Предположим, что $\varepsilon_{s+1} + \dots + \varepsilon_1 = 0$. Тогда поскольку $\varepsilon_1 = -1$, то найдётся такое k от 2 до $s+1$, что $\varepsilon_k = 1$. Значит, $a_{2k-2} = -a_0$, т. е. число $-a_0$ является коэффициентом многочлена $P(x)$. Тогда по условию

$$\begin{aligned} 0 = P(-a_0) &= \varepsilon_{s+1}((-a_0)^{2s+1} - a_0(-a_0)^{2s}) + \\ &+ \varepsilon_s((-a_0)^{2s-1} - a_0(-a_0)^{2s-2}) + \dots + \varepsilon_1(-a_0 - a_0) = \\ &= -2\varepsilon_{s+1}a_0^{2s+1} - 2\varepsilon_s a_0^{2s-1} - \dots - 2\varepsilon_2 a_0^3 - 2\varepsilon_1 a_0 = \\ &= -2a_0(\varepsilon_{s+1}a_0^{2s} + \varepsilon_s a_0^{2s-2} + \dots + \varepsilon_2 a_0^2 + \varepsilon_1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_1 = -1$ делится на a_0 , поэтому $|a_0| \leq 1$, что завершает доказательство.

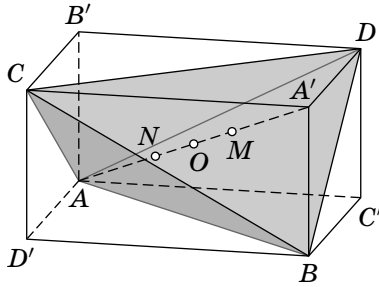
Комментарий. Можно показать, что коэффициенты многочлена $P(x)$ не могут быть равны 2, то есть они могут принимать только значения $\pm 1, -2$.

5. В тетраэдре $ABCD$ скрещивающиеся рёбра попарно равны. Через середину отрезка $АН_A$, где H_A — точка пересечения высот грани BCD , провели прямую h_A перпендикулярно плоскости BCD . Аналогичным образом определили точки H_B, H_C, H_D и построили прямые h_B, h_C, h_D соответственно для трёх других граней тетраэдра. Докажите, что прямые h_A, h_B, h_C, h_D пересекаются в одной точке.

(М. Евдокимов)

Решение. Проведём через пару скрещивающихся рёбер тетраэдра $ABCD$ две параллельные плоскости. Так же поступим для двух других пар скрещивающихся рёбер и получим параллелепипед. Диагонали его граней равны между собой, поэтому все грани — прямоугольники, и параллелепипед прямоугольный. Пусть O — его центр, являющийся также центром описанной сферы тетраэдра $ABCD$. Пусть

также A', B', C', D' — точки, симметричные A, B, C, D соответственно относительно точки O (см. рисунок). Докажем, что все построенные прямые проходят через точку O .

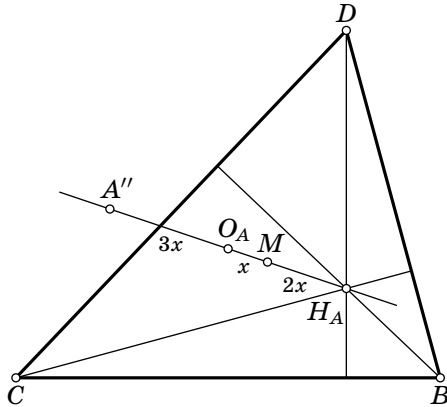


Пусть M — центр масс треугольника BCD . Тогда

$$\overrightarrow{A'M} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D}) = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{A'A},$$

то есть точка M лежит на диагонали AA' и делит её в отношении $2 : 1$, считая от вершины A . Аналогично центр масс N треугольника $B'C'D'$ лежит на этой диагонали и делит её в отношении $1 : 2$, считая от вершины A . Точка O — середина отрезка NM , поэтому $AO : OM = 3 : 1$.

Рассмотрим проекцию на плоскость BCD : A'' — проекция точки A , O_A — проекция центра O . Точка O совпадает с центром описанной сферы тетраэдра $ABCD$, поэтому O_A — центр описанной окружности треугольника BCD .



Тогда прямая AA' проецируется в прямую Эйлера $O_A M$ треугольника BCD . Пусть $O_A M = x$. Тогда $O_A A'' = 3x$ (O де-

лит отрезок AM в отношении $3:1$, это отношение сохраняется при проецировании). Кроме того, O_A , M , H_A лежат на одной прямой и $O_AM:MH_A = 1:2$ (прямая Эйлера), отсюда $MH_A = 2x$. Следовательно, $O_AA'' = O_AH_A$, т. е. точка O_A является проекцией середины отрезка AH_A на плоскость $BSCD$. Прямая OO_A , перпендикулярная плоскости $BSCD$, делит отрезок AH_A пополам, а значит, совпадает с прямой h_A . Итак, все построенные прямые проходят через точку O .

6. Кощей придумал для Ивана-дурака испытание. Он дал Ивану волшебную дудочку, на которой можно играть только две ноты — до и си. Для прохождения испытания Ивану нужно сыграть какую-нибудь мелодию из 300 нот на свой выбор. Но до того, как он начнёт играть, Кощей выбирает и объявляет запретными одну мелодию из пяти нот, одну — из шести нот, ..., одну — из 30 нот. Если в какой-то момент последние сыгранные ноты образуют одну из запретных мелодий, дудочка перестаёт звучать. Сможет ли Иван пройти испытание, какие бы мелодии Кощей ни объявил запретными?

(В. Клепцын)

Ответ: да, может.

Первое решение. Для каждого n зададимся вопросом: а сколько вообще мелодий длины n , не содержащих запретных, Иван может сыграть? Обозначим это количество через L_n и для удобства положим $L_0 = 1$.

Оценим рост последовательности L_n . Сыграв после такой мелодии из n нот каждую из двух возможных нот, мы получаем $2L_n$ мелодий длины $n+1$; при этом запретная мелодия в такой последовательности могла возникнуть только в конце (потому что мы предполагаем, что в первых n нотах запретных мелодий нет). Если такая полученная мелодия оканчивается на запретную длины k , то после выкидывания этой запретной остаётся начальная часть из $n+1-k$ нот, не содержащая запретных мелодий, — поэтому таких мелодий не больше L_{n+1-k} . Вычёркивая из исходных $2L_n$ мелодий длины $n+1$ все такие, заканчивающиеся на запретную, мелодии, окончательно получаем нижнюю оценку

$$L_{n+1} \geq 2L_n - \sum_{5 \leq k \leq n+1} L_{n+1-k}. \quad (1)$$

Оценим теперь скорость роста последовательности L_n : докажем по индукции, что для всех $m \geq 1$ выполнено (Фибоначчи-подобное) неравенство

$$L_{m+1} \geq L_m + L_{m-1}. \quad (2)$$

При $n = 0, 1, 2, 3, 4$ последовательность L_n — это 1, 2, 4, 8, 16, поэтому (2) выполнено при $m = 1, 2, 3$.

Пусть теперь (2) выполнено для всех $m < n$, докажем его для $m = n$. Применяя (1) и выполненное по предположению (2) для $m = n - 1$, получаем

$$\begin{aligned} L_{n+1} - L_n - L_{n-1} &\geq \\ &\geq L_n - L_{n-1} - \sum_{5 \leq k \leq n+1} L_{n+1-k} \geq L_{n-2} - \sum_{5 \leq k \leq n+1} L_{n+1-k}. \end{aligned}$$

Правая часть теперь оценивается с последовательным использованием предположения индукции для $m = n - 3, n - 4, \dots, 1$:

$$\begin{aligned} \underbrace{L_{n-2} - L_{n-4}}_{\geq L_{n-3}} - L_{n-5} - L_{n-6} - \dots - L_0 &\geq \\ &\geq \underbrace{L_{n-3} - L_{n-5}}_{\geq L_{n-4}} - L_{n-6} - L_{n-7} - \dots - L_0 \geq \\ &\geq \underbrace{L_{n-4} - L_{n-6}}_{\geq L_{n-5}} - L_{n-7} - L_{n-8} - \dots - L_0 \geq \dots \geq \\ &\geq L_2 - L_0 \geq L_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Шаг индукции доказан, и тем самым утверждение (2) доказано при всех m . Значит, $L_n > 0$ при всех n ; в частности, найдётся последовательность нот длины $n = 300$, не содержащая запретных мелодий.

Вариант первого решения. Начав как в первом решении, после получения неравенства (1) можно продолжить оценку другим способом. А именно, доказать по индукции, что для всех m выполнено неравенство

$$L_{m+1} \geq cL_m, \quad (3)$$

где $c > 1$ — некоторая константа. (Такое неравенство гарантирует экспоненциальный рост последовательности L_n , так что его выбор достаточно естественен.)

Посмотрим, при каком условии на $c > 1$ мы можем доказать (3) по индукции. А именно, предположим, что это неравенство выполнено при всех $m < n$. Тогда при всех k выполнено

$$L_{n-k} \leq \frac{1}{c^k} L_n,$$

и поэтому из (1) следует, что

$$L_{n+1} \geq \left(2 - \sum_{5 \leq k \leq n+1} \frac{1}{c^{k-1}} \right) L_n.$$

Для завершения шага индукции тем самым достаточно потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$2 - \sum_{k \geq 5} \frac{1}{c^{k-1}} \geq c. \quad (4)$$

Сумма геометрической прогрессии в (4) равна $\frac{c^{-4}}{1-c^{-1}}$, поэтому это условие может быть переписано как

$$2 - c - \frac{c^{-4}}{1-c^{-1}} \geq 0,$$

или, после домножения на $c^3(c-1) > 0$,

$$c^3(2-c)(c-1) - 1 \geq 0. \quad (5)$$

Для любого такого $c > 1$ неравенство (3) оказывается доказанным по индукции, откуда $L_n > 0$ при всех n , что завершает решение задачи. Остаётся удовлетворяющую (5) константу $c > 1$ предъявить.

Найдём максимум левой части: приравнивание к нулю производной, после сокращения на c^2 , приводит к квадратному уравнению

$$-5c^2 + 12c - 6 = 0$$

с корнем, бóльшим единицы,

$$c_* = \frac{6 + \sqrt{6}}{5}.$$

Его подстановка приводит к значению

$$c_*^3(2-c_*)(c_*-1) - 1 = \frac{744\sqrt{6} - 1721}{5^5},$$

которое положительно: $\frac{1721}{744} = 2 + \frac{233}{744} < 2\frac{1}{3} < \sqrt{6}$.

Комментарий. На самом деле, подстановка вместо c золотого сечения $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ обращает неравенство (4) в равенство; неравенство (5) выполнено на отрезке $[\varphi, 1,75\dots]$, и в частности для $c = \frac{5}{3}$ или $c = \frac{7}{4}$, что несложно проверить вручную: их подстановка приводит к выполняющимся неравенствам

$$5^3 \cdot 1 \cdot 2 > 3^5 \quad \text{и} \quad 7^3 \cdot 1 \cdot 3 > 4^5.$$

Второе решение. (Это решение было предложено одним из участников олимпиады.)

Рассмотрим всевозможные мелодии из двух нот длины $p = 13$; их $2^p = 2^{13}$ штук. Каждую из этих мелодий можно продолжить периодически в обе стороны, получая бесконечные периодические мелодии; скажем, что две такие мелодии эквивалентны, если одна из них получается из другой сдвигом. С точностью до такой эквивалентности, есть

$$\frac{2^{13} - 2}{13} + 2 = 632$$

разных периодических последовательности.

Посмотрим, сколько из них содержат запретные мелодии. Поскольку мы разрешаем сдвиг — можно считать, что запретная мелодия начинается с фиксированного (например, первого) места. Поэтому из-за запретных мелодий длины $k = 5, 6, \dots, 12$ мы вычеркнем не больше $2^8, 2^7, \dots, 2^1$ периодических последовательностей из нашего списка, а из-за последовательностей длины $k = 13, \dots, 30$ — не более одной. Итого запреты Кощея вычёркивают не больше

$$(2^9 - 2) - 18 = 528$$

последовательностей. Значит, найдётся хотя бы одна бесконечная периодическая мелодия, не содержащая запрещённых Кощеем участков, и Ивану достаточно сыграть её участок длины 300.

Комментарий. Несложно увидеть, что если бы длины запретных мелодий начинались с 3 нот, а не с 5, то Кощей мог бы не дать Ивану победить. Действительно, обозначим ноту до через 0 и си через 1; запрет на мелодию 001 приводит к тому, что сыграв два раза подряд 0, Иван вынужден будет играть только его. Вкупе с запретом на 0000000000 — это запретит просто 00 везде,

кроме самого конца мелодии, и потому за каждым 0 Ивану придётся сразу играть 1. Добавив к этому 1101 и 11111111, Кощей точно так же обеспечивает, чтобы за 1 Иван вынужден был бы играть 0. И наконец, добавив 010101, Кощей обеспечивает себе победу.

Более того, существует и пример набора запретов, приводящий к победе Кощей и начинающийся с запрета длины 4: он был приведён в замечании 2.3 в работе Дж. С. Миллера¹:

$$1000, 10011, 100101, 1011111, 10111101, 101110101, \\ 1011101101, 10110101101, 101101010101, 1011010101101, \\ 0^{m_1}, 1^{m_2}, (100)^{m_3}, (1110)^{m_4}, (110)^{m_5}, (10)^{m_6},$$

где m_j достаточно большие, а степень означает повторение.

Последовательности, не содержащие какого-либо заданного набора запрещённых участков, исследовались в различных ситуациях в математике на протяжении более ста лет. Так, в 1906 году норвежский математик Аксель Туэ показал², что существует последовательность из 0 и 1, в которой ни один её участок не повторяется три раза подряд — иными словами, существует последовательность с запретами вида 000, 111, 010101, 101010 и так далее³. Эта последовательность сейчас называется последовательностью Туэ—Морса; её можно определить, например, как последовательность сумм по модулю 2 цифр двоичной записи числа $n = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots;$$

её также можно строить рекуррентно, начиная с одного символа 0 и последовательно дописывая после записанной строки её же с заменой 0 на 1 и 1 на 0.

Им же была построена последовательность из трёх символов, 0, 1 и 2, в которой ни одно слово не повторяется два раза подряд — иными словами, запрещены под слова вида 00, 2121, 0202 и так далее.

Не зная об этом, в 1937 году последовательности из трёх символов без повторяющихся подряд подслов и из двух символов

¹J. S. Miller. Two notes on subshifts // Proc. Amer. Math. Soc. 2012. V. 140, no. 2. P. 1617–1622.

²A. Thue. Über unendliche Zeichenreihen // Christiania Vidensk.-Selsk. Skr. 1906. Nr. 7. P. 1–22.

³Перевод его работ на английский можно найти в: J. Berstel. [Axel Thue's papers on repetitions in words: a translation](#). Publications du LaCIM 20. Université du Québec à Montréal, 1995.

без подслов, повторяющихся подряд трижды, построил С. Е. Аршон¹. В 1974–75 годах последовательности с запретами обсуждались в «Кванте». В задаче М300* рассматривалась последовательность в алфавите из трёх символов, избегающая запрещённых подслов, все из которых имеют разную длину². В задаче М310 требовалось доказать, что среди n -значных чисел есть по меньшей мере 8^n , в которых никакая последовательность цифр не повторяется подряд два раза³. Их решениям были посвящены статьи Г. Гуревича «Бесповторные последовательности»⁴ и А. Степина и А. Таги-Заде «Слова с ограничениями»⁵.

Такие вопросы интересны не только сами по себе, но и в связи с задачами алгебры — когда рассматриваются длинные произведения образующих (как раз оказывающиеся словами в конечном алфавите), а наличие запрещённого подслова позволило бы упростить такое произведение. См., например, работу Е. С. Голода и И. Р. Шафаревича «О башне полей классов»⁶. На лемму 3 этой работы можно смотреть как на достаточное условие наличия сколь угодно длинных слов в алфавите из d символов, избегающих списка запрещённых слов, в котором r_i слов длины $i = 2, 3, \dots$; это условие формулируется в терминах неотрицательности коэффициентов некоторого степенного ряда.

Очень естественное построение одной бесконечной мелодии, избегающей данных запретов, описано в уже цитировавшейся выше работе Дж. С. Миллера «Two notes on subshifts»; оно основано на «отслеживании» уже почти сыгранных запрещённых мелодий, и достаточное условие, позволяющее этому построению работать, очень близко к уже обсуждавшемуся здесь. А именно, предложение 2.1 этой работы утверждает, что достаточно, чтобы нашлось $c > 1$, для которого

$$d - \sum_{k=2}^{\infty} r_k c^{-(k-1)} \geq c,$$

где d — число возможных нот, а r_k — число запретных мелодий длины k . Это же условие применяется в недавнем препринте

¹С. Е. Аршон. Доказательство существования n -значных бесконечных асимметричных последовательностей // Матем. сб. 1937. Т. 2(44), вып. 4. С. 769–779.

²Квант. 1974. № 12. С. 45.

³Квант. 1975. № 2. С. 26.

⁴Квант. 1975. № 9. С. 7–11.

⁵Квант. 1975. № 10. С. 32–37.

⁶Е. С. Голод, И. Р. Шафаревич. О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28, вып. 2. С. 261–272.

М. Розенфельда¹ для экспоненциальной оценки роста количества разрешённых слов и энтропии отображения сдвига, действующего на них. Заключение леммы 3 этого препринта утверждает, что тогда $L_{n+1} \geq cL_n$, и рассуждение проходит по уже знакомой читателю схеме. Работы Миллера и Розенфельда и послужили первоисточником данной задачи.

Последовательности с запретами исследуются и в теории динамических систем — из совсем недавних работ можно упомянуть, например, работу Р. Павлова².

Возвращаясь к неповторным последовательностям, упомянем одну открытую задачу в этой области (спасибо А. Куликову за ссылку). Последовательность Туэ из трёх символов 0, 1, 2 не содержит повторяющихся подряд подслов. А что, если мы должны построить последовательность без повторяющихся подряд подслов, в которой для каждого места есть выбор из трёх символов — но наборы разрешённых символов разные для разных мест? Казалось бы, это должно быть только проще (если наборы символов разные, то совпадений может быть меньше) — но даже для случая, когда для каждого места есть выбор из четырёх символов, это было доказано лишь недавно³.

Более того, в качестве (удивительной) иллюстрации сложности данного вопроса можно привести пример модификации задачи о четырёх красках. А именно, допустим, что для карты на плоскости для каждой страны есть свой набор из k цветов и картограф хочет раскрасить каждую страну в один из соответствующих цветов так, чтобы соседние страны были раскрашены в разные цвета. Хотя кажется, что от того, что цвета могут быть разными, получение раскраски должно только упроститься — оказывается, что при $k = 4$ есть контрпример: (очень понятно устроенная) карта, которую раскрасить требуемым образом нельзя! Существование такого примера было сформулировано как гипотеза в работе Эрдеша, Рубина и Тэйлора⁴, а сам этот

¹*M. Rosenfeld. Finding lower bounds on the growth and entropy of subshifts over countable groups. Preprint [arXiv:2204.00394](https://arxiv.org/abs/2204.00394).*

²*R. Pavlov. On subshifts with slow forbidden word growth // Ergodic Theory and Dynamical Systems. April 2022. V. 42, no. 4. P. 1487–1516; preprint [arXiv:1912.06315](https://arxiv.org/abs/1912.06315).*

³*J. Grytczuk, J. Kozik, P. Micek. New approach to nonrepetitive sequences // Random Structures & Algorithms, March 2013. V. 42, no. 2. P. 214–225; preprint [arXiv:1103.3809](https://arxiv.org/abs/1103.3809).*

⁴*P. Erdős, A. L. Rubin., H. Taylor. Choosability in graphs // Combinatorics, graph theory and computing. 1980. P. 125–157. (Proc. West Coast Conf., Arcata/Calif. 1979).*

такой пример был построен в работе 1993 года М. Войт¹. А гипотеза о том, что $k = 5$ цветов всегда достаточно (сформулированная в той же работе Эрдеша, Рубина и Тэйлора), была доказана в работе 1994 года К. Томассена².

¹*M. Voigt. List colourings of planar graphs* // Discrete Mathematics. 1993. V. 120. P. 215–219.

²*C. Thomassen, Every Planar Graph Is 5-Choosable* // Journal of Combinatorial Theory. Ser. B. 1994. V. 62, no. 1. P. 180–181.

11 класс, второй день

1. Существует ли на координатной плоскости точка, относительно которой симметричен график функции

$$f(x) = \frac{1}{2^x + 1} ?$$

(Д. Горяшин)

Ответ: да, существует.

Решение. Покажем, что функция $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ является нечётной. Действительно,

$$g(-x) = \frac{1}{2^{-x} + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2^x}{2^x + 1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^x + 1} = -g(x).$$

Следовательно, график функции g симметричен относительно начала координат, а график функции f симметричен относительно точки $(0, \frac{1}{2})$.

2. Чемпионат по футболу проходил в два круга. В каждом круге каждая команда сыграла с каждой один матч (за победу даётся три очка, за ничью одно, за поражение ноль). Оказалось, что все команды вместе набрали в первом круге 60% от общей суммы всех очков за два круга. Известно также, что победитель чемпионата набрал во втором круге в 30 раз меньше очков, чем все команды вместе в первом круге. Сколько команд участвовало в турнире?

(М. Евдокимов)

Ответ: 20.

Решение. Пусть в турнире участвовало n команд. Заметим, что в каждом матче две команды в сумме получают 2 или 3 очка. Значит, общее количество очков, которые могут набрать все команды в одном круге, не меньше, чем $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, и не больше, чем $3 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$. Из условия следует, что все команды вместе набрали в первом круге ровно в полтора раза больше очков, чем во втором (60 % всех очков в первом круге и 40 % во втором). Но это возможно лишь в случае, если в первом круге все матчи закончились победой одной из команд (общая сумма очков $3 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$), а во втором — ничьей (общая сумма очков $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$). Зна-

чит, победитель набрал во втором круге $n - 1$ очков. По условию, $30 \cdot (n - 1) = 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, откуда находим $n = 20$.

3. Докажите, что если при $n \in \mathbb{N}$ число $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ целое, то оно — точный квадрат. (Фольклор)

Решение. Если число $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ целое при $n \in \mathbb{N}$, то оно чётное. Обозначим $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1} = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\sqrt{12n^2 + 1} = k - 1$. Возводя это равенство в квадрат, получаем $12n^2 = k^2 - 2k$, откуда следует, что число k чётное: $k = 2m$, где $m \in \mathbb{N}$. Тогда $12n^2 = 4m^2 - 4m$, или $3n^2 = (m - 1)m$.

Поскольку числа m и $m - 1$ взаимно просты, следует рассмотреть два случая:

1) $m - 1 = u^2$, $m = 3v^2$, где $u, v \in \mathbb{N}$, $u \cdot v = n$;

2) $m - 1 = 3u^2$, $m = v^2$, где $u, v \in \mathbb{N}$, $u \cdot v = n$.

В первом случае имеем $3v^2 - 1 = u^2$, то есть u^2 даёт остаток 2 при делении на 3. Это невозможно, так как точный квадрат может давать при делении на 3 только остатки 0 или 1.

Во втором случае получаем $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1} = 4m = (2v)^2$ — точный квадрат, что и требовалось доказать.

4. В остроугольном треугольнике ABC высоты AH_A , BH_B и CH_C пересекаются в точке H . Через точки, в которых окружность радиуса HN_A с центром H пересекает отрезки BH и CH , проведена прямая ℓ_A . Аналогично проведены прямые ℓ_B и ℓ_C . Докажите, что точка пересечения высот треугольника, образованного прямыми ℓ_A , ℓ_B , ℓ_C , совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC .

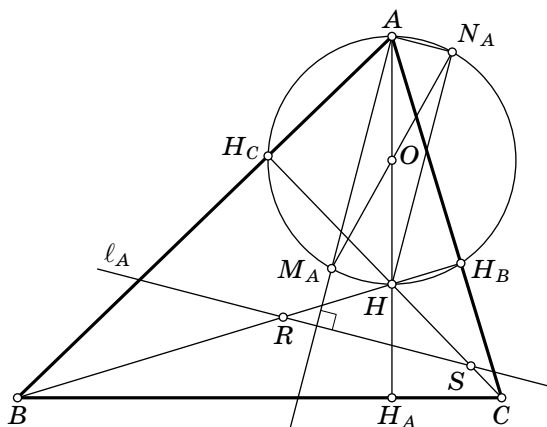
(И. Михайлов)

Решение. Покажем, что биссектрисы треугольника ABC содержат высоты треугольника, образованного прямыми ℓ_A , ℓ_B , ℓ_C . Для этого докажем, что точка пересечения прямых ℓ_B , ℓ_C лежит на биссектрисе угла BAC , а прямая ℓ_A перпендикулярна этой биссектрисе.

1. Докажем, что прямая ℓ_A перпендикулярна биссектрисе угла BAC .

Пусть R и S — это точки пересечения окружности с центром в H радиуса HN_A с отрезками BH и CH соответственно. Тогда треугольник RHS — равнобедренный с основании-

ем RS , поэтому прямая RS (она же ℓ_A) перпендикулярна прямой p_A , содержащей биссектрису угла BHC . Поэтому достаточно доказать, что прямая p_A параллельна биссектрисе угла BAC . Пусть M_A и N_A — середины дуг $H_C H H_B$ и $H_B A H_C$ окружности ω_A , построенной на AH как на диаметре. Из свойств вписанных углов следует, что AM_A — биссектриса угла BAC , HN_A — биссектриса угла $H_C H H_B$. Заметим также, что $M_A N_A$ — диаметр окружности ω_A . Значит, отрезки $M_A N_A$ и AH пересекаются в центре O окружности ω_A как её диаметры и делятся точкой пересечения пополам. То есть четырёхугольник $AM_A H N_A$ — параллелограмм (и даже прямоугольник, поскольку его углы — вписанные, опирающиеся на диаметры окружности ω_A , то есть прямые). В частности, $AM_A \parallel HN_A$, что и требовалось.



2. Докажем, что прямые ℓ_B и ℓ_C пересекаются на биссектрисе угла BAC .

Пусть прямые ℓ_C и ℓ_B пересекают отрезки BH , CH в точках P и Q соответственно, а точку пересечения ℓ_B и ℓ_C обозначим через X . Пусть углы A , B и C треугольника ABC равны 2α , 2β и 2γ соответственно. Поскольку $HP = HH_C$ и $HQ = HH_B$, то треугольники $HH_C P$ и $HH_B Q$ — равнобедренные с углами, равными $\angle H_C H B = \angle BAC = 2\alpha$, напротив оснований. Поэтому

$$\angle H P H_C = \angle H Q H_B = 90^\circ - \alpha = \beta + \gamma.$$

Пусть прямые ℓ_C и ℓ_B пересекают отрезок AH в точках U и V соответственно. Тогда треугольник $P U H$ — равнобедренный.

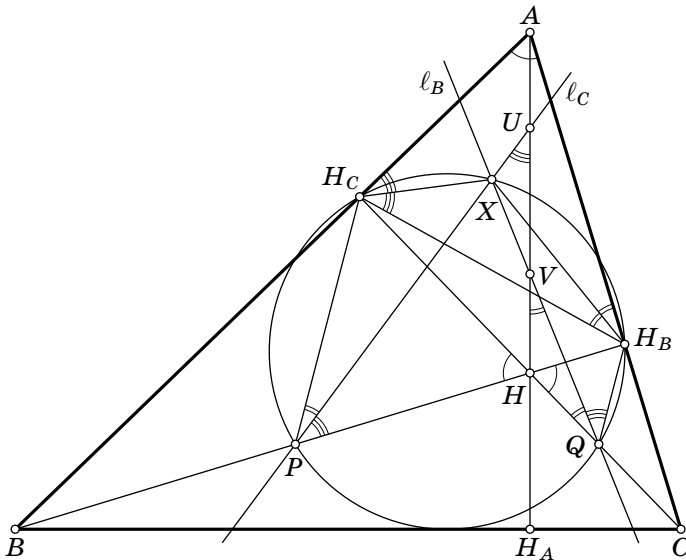
ренный с основанием PU , значит,

$$\angle XPH = \angle UPH = \frac{180^\circ - \angle BHA}{2} = \gamma.$$

Рассуждая аналогично для треугольника QVH , получаем, что $\angle XQH = \beta$. Тогда

$$\angle XPH_C = \angle HPH_C - \angle HPX = \beta + \gamma - \gamma = \beta = \angle XQH_C,$$

откуда следует, что X лежит на окружности, описанной около треугольника $H_C P Q$. Аналогично точка X лежит на окружности, описанной около треугольника $H_B P Q$. Таким образом, пять точек X, H_B, P, Q, H_C лежат на одной окружности.



Тогда по свойству вписанных углов $\angle XH_B H_C = \angle XQH_C = \beta$. Четырёхугольник $BH_C H_B C$ — вписанный, поскольку $\angle BH_C C = \angle BH_B C = 90^\circ$. Значит, $\angle H_C H_B C = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 2\beta$, то есть $\angle AH_B H_C = 2\beta$. Отсюда следует, что $H_B X$ — биссектриса угла $AH_B H_C$. Аналогично $H_C X$ — биссектриса угла $AH_C H_B$. Значит, точка X является центром окружности, вписанной в треугольник $AH_B H_C$, в частности, лежит на биссектрисе угла BAC .

Повторяя рассуждения пунктов 1 и 2 для двух других биссектрис треугольника ABC , получаем, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC совпадает с точкой

пересечения высот треугольника, образованного прямыми ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C , что и требовалось доказать.

5. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают белую клетчатую доску 100×100 на произвольные группы клеток, каждая из чётного (но не обязательно все из одинакового) числа клеток, каждый — на свой набор групп. Верно ли, что после этого всегда можно покрасить по половине клеток в каждой группе из разбиения Пети в чёрный цвет так, чтобы в каждой группе из разбиения Васи было поровну чёрных и белых клеток? (А. Грибалко, И. Михайлов)

Ответ: да, верно.

Первое решение. Для удобства назовём непересекающиеся группы клеток одного разбиения (Пети или Васи) *фигурками*.

Построим вспомогательный двудольный граф G . Для каждой из фигурок одного из разбиений (Пети или Васи) добавим в граф G новую, соответствующую этой фигурке вершину. При этом вершины, соответствующие фигуркам Пети, отнесём к первой доле, а вершины, соответствующие фигуркам Васи, — ко второй. Далее проведём рёбра между некоторыми вершинами графа G по следующему правилу: если фигурка Пети A пересекается с фигуркой Васи B по нечётному количеству клеток, то проведём между соответствующими этим фигуркам вершинами ребро.

Заметим, что в построенном графе степень каждой вершины чётна. Действительно, выберем, например, произвольную фигурку Васи A . Поскольку A состоит из чётного числа клеток и пересекается лишь с фигурками из разбиения Пети, то по нечётному количеству клеток она будет пересекаться с чётным количеством фигурок.

Рассмотрим произвольную компоненту связности G . Поскольку степень каждой вершины этой компоненты чётна, то существует цикл (так называемый *эйлеров цикл*), проходящий по всем рёбрам этой компоненты ровно по 1 разу. Выберем такие циклы для каждой компоненты связности G . Для удобства назовём полученное разбиение рёбер графа G на циклы $\mathcal{Q}$.

Теперь построим искомую раскраску фигурок в разбиении Пети. Выберем произвольный цикл σ из построенного

разбиения Ω и ориентируем его рёбра в каком-то из двух возможных естественных направлений его обхода. Рассмотрим произвольное (уже ориентированное) ребро e цикла σ . Пусть оно соединяет вершины, соответствующие фигуркам A и B . По построению фигурки A и B пересекаются по нечётному количеству клеток. Пусть они пересекаются по $2k + 1$ клетке. Тогда если ребро e ведёт из первой доли во вторую, то Петя покрасит в чёрный цвет произвольные k из этих клеток, в противном случае — произвольные $k + 1$ из них. Пусть Петя выполнит аналогичную покраску для каждой компоненты связности G . Наконец, пусть для каждой пары фигурок A и B , пересекающихся по чётному количеству клеток, Петя покрасит ровно половину клеток в их пересечении в чёрный цвет.

Докажем, что полученная покраска будет искомой. Рассмотрим, например, произвольную фигурку Пети A . Пусть B — произвольная фигурка Васи. Заметим, что среди общих клеток фигурок A и B разность числа чёрных и белых клеток равна ± 1 или 0 , в зависимости от чётности числа клеток в этом пересечении. Поэтому достаточно доказать, что разность $+1$ встречается среди пересечений фигурки Пети A с фигурками Васи столько же раз, сколько и разность -1 . Пусть фигурке A в графе G соответствует вершина v , которая лежит в некотором цикле σ из построенного ранее разбиения Ω . Тогда каждой разности $+1$ соответствует ребро цикла σ , входящее в v , а каждой разности -1 — ребро цикла σ , исходящее из v . Из построения цикла σ следует, что рёбер, входящих в v , в нём будет столько же, сколько и рёбер, исходящих из v . Поэтому фигурок Васи, в клетках пересечения A с которыми будет ровно на одну чёрную клетку больше, будет столько же, сколько фигурок Васи, в клетках пересечения A с которыми будет ровно на одну белую клетку больше. Таким образом, в фигурке A поровну чёрных и белых клеток, что и требовалось доказать.

Второе решение. Заметим, что частным случаем разбиений является ситуация, когда каждая из Петиних и Васиных групп содержит в точности две клетки. С другой стороны, любое разбиение на группы из чётного числа клеток можно измельчить на группы из двух клеток, и если существует требуемая раскраска для измельченных разби-

ений, то та же самая раскраска, очевидно, решает задачу и для исходных разбиений.

Теперь каждую Васину группу (из двух клеток), совпадающую с какой-то из Петиных групп, покрасим в чёрный и белый цвет любым из двух способов — одну клетку в чёрный, другую в белый цвет.

Осталось раскрасить множество клеток, которое Васей и Петей разбито на пары так, что ни одна Васина пара не совпадает с Петиндой парой.

Построим граф, вершины которого соответствуют Васиным и Петиным группам (у Васи и Пети, очевидно, одно и то же количество групп). Две вершины соединим ребром тогда и только тогда, когда соответствующие группы имеют общую клетку. Тогда каждая вершина графа имеет степень два, причём любое ребро соединяет одну из вершин, соответствующих Васиным группам, с одной из вершин, соответствующих Петиным группам.

Такой граф разбивается на циклы, причём каждый цикл имеет чётную длину (за счёт того, что в нём чередуются вершины, соответствующие Васиным и Петиным группам) и допускает раскраску в два цвета, при которой цвета рёбер чередуются вдоль цикла. Наконец, цвету клетки сопоставим цвет ребра, соединяющего две вершины графа, соответствующие Васиной и Петиндой группам, пересекающимся по данной клетке. Полученная раскраска удовлетворяет условию задачи.

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс (5855 работ)

	1	2	3	4	5	6
8					153	1
7			171	96	141	1
6			48	6	20	0
5	1636	2956	198	19	10	0
4	33	2	164	19	34	2
3	116	24	238	8	5	2
2	1	4	594	16	373	2
1	123	0	1326	1570	336	20
0	3946	2869	3116	4121	4783	5827

7 класс (4303 работы)

	1	2	3	4	5	6
9					11	403
8					3	0
7			298	213	5	0
6			64	6	9	2
5	2	1677	226	48	3	0
4	2979	145	181	26	8	9
3	0	21	259	11	24	0
2	0	663	461	17	37	58
1	0	112	874	1199	58	15
0	1322	1685	1940	2783	4145	3816

8 класс (1950 работ)

	1	2	3	4	5	6
+	664	694	19	29	28	35
±	131	98	28	5	25	11
+ / 2	0	0	0	2	0	0
±	10	45	7	12	4	15
—	615	875	1263	848	1363	1113
0	530	238	633	1054	530	776

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9 класс (1275 работ)

	1	2	3	4	5	6
+	523	501	142	27	77	2
±	297	56	32	3	6	0
∓	3	36	101	1	8	4
—	346	487	650	369	763	401
0	106	195	350	875	421	868

10 класс (988 работ)

	1	2	3	4	5	6
+	414	342	271	74	2	7
±	102	27	35	12	0	0
∓	70	24	80	21	13	85
—	295	330	386	384	209	257
0	107	265	216	497	764	639

11 класс, первый день (667 работ)

	1	2	3	4	5	6
+	536	317	333	27	68	2
±	18	13	41	24	11	0
∓	13	3	2	27	6	1
—	100	334	291	589	582	664

11 класс, второй день (239 работ)

	1	2	3	4	5
+	218	173	100	20	41
±	6	2	25	2	1
∓	2	13	12	24	3
—	13	51	102	193	194

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики, в котором представлены все основные направления современной математики.

С 1933 года на мехмате было подготовлено свыше 40 тысяч специалистов в самых разных областях математики и механики. Среди них около 5 тысяч кандидатов и докторов наук, более 50 академиков, 6 лауреатов Филдсовской премии (С. П. Новиков, Г. А. Маргулис, В. Г. Дринфельд, М. Л. Концевич, В. А. Воеводский, А. Ю. Окуньков). Сейчас на мехмате работают 16 академиков и 13 членов-корреспондентов РАН. В 2019 году в России по решению Правительства РФ созданы 4 математических центра мирового уровня; мехмат — соорганизатор одного из них.

Научная работа на мехмате происходит в рамках научных школ. Во главе школы стоит один или несколько ученых, вокруг которых группируются их ученики и ученики их учеников. Выбирая научного руководителя и кафедру, студент попадает в большой научный коллектив. А студентам младших курсов помогают включиться в научную работу организованные кафедрами просеминары.

Система образования на мехмате динамично развивается: организуются новые курсы и циклы курсов, открываются новые образовательные программы и т. д. В частности, в 2021 году впервые прошел набор на программу «Фундаментальная математика и математическая физика» (fmmp.math.msu.ru), включающую самые современные курсы по математике и математической физике.

Большое внимание на факультете уделяется прикладным исследованиям: изучаются атомные реакторы, свойства химических веществ, прогнозируется погода, анализируются экономические процессы и пр.

Выпускники мехмата работают в Московском университете и других крупнейших вузах страны, в академических институтах. Практически вся современная московская ма-

тематическая школа вышла с мехмата. Мехматяне также работают в школах, в авиакосмической отрасли, в инженеринговых компаниях, в IT, в банках, в страховании, — везде, где нужны фундаментальные знания, аналитический ум, навыки работы с большими объемами информации.

Поэтому мехмат всюду плотен — где бы вы ни оказались, где-то рядом есть наши выпускники...

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ НИУ ВШЭ

создан в 2007 г. при участии Независимого Московского Университета для подготовки ведущих специалистов мирового уровня в области чистой математики, ее приложений и математического образования. Лидерские позиции НИУ ВШЭ в области математики отражены в ключевых предметных рейтингах: университет вошел в 2022 году в топ-75 по рейтингу QS по рейтингу ARWU, став в последнем единственным представителем России.

Отличительная особенность факультета — сочетание глубокой фундаментальной подготовки с возможностью раннего погружения в интересующую область чистой математики или ее приложений. Этой цели служат индивидуальные учебные планы и большой объем персонального взаимодействия преподавателя с каждым студентом, начиная с 1 курса (включая сдачу листочков и курсовые работы), а также вовлечение студентов в активную научную жизнь. На факультете действуют 4 международных лаборатории, специализирующиеся на различных областях математики, лаборатория математического образования, научно-учебная лаборатория «Сложные сети». Для старшекурсников, ориентированных на приложения, есть возможность участвовать в работе проектно-учебных групп с индустриальными партнерами (Тинькофф, Huawei).

Благодаря такому подходу выпускники, нацеленные на академическую карьеру, поступают в лучшие аспирантуры мира, а остальные неизменно востребованы в IT, финтехе и других наукоемких приложениях.

Помимо программы общего профиля «Математика», на факультете есть программа совместного бакалавриата с Центром педагогического мастерства, нацеленная на подготовку высококвалифицированных преподавателей физико-математических школ.

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК НИУ ВШЭ

создан в 2014 году совместно с компанией «Яндекс». Факультет ведет подготовку специалистов высокого уровня по работе с данными, аналитиков, исследователей в области компьютерных наук и программных инженеров для ведущих ИТ-компаний и исследовательских центров. Бакалаврские программы «Прикладная математика и информатика» и «Программная инженерия» ежегодно привлекают сильнейших абитуриентов страны. В 2018 году открыта англоязычная программа двух дипломов «Прикладной анализ данных» совместно с Лондонской Школой Экономики.

Наряду с отличной фундаментальной подготовкой в области математики и информатики большое внимание уделяется прикладным курсам и проектной работе, построению индивидуальной образовательной траектории. В числе преподавателей — ведущие российские математики и эксперты в области Computer Science, международные специалисты, исследователи из институтов РАН, сотрудники высокотехнологичных компаний, победители олимпиад по спортивному программированию и по математике.

Образовательные программы ФКН реализуются совместно со Сбером, Школой анализа данных Яндекса, Тинькофф, 1С, Самолет, МТС, Альфа-Банком, Сколтехом и Институтом системного программирования РАН. На факультете 17 научных лабораторий. Среди реализуемых проектов — сложность вычислений и алгоритмическая теория игр, анализ динамики сообществ в графах и кластеризация, разработки в области биоинформатики и автоматической обработки текстов. Наши студенты участвуют в фундаментальных и прикладных проектах, побеждают на хакатонах и олимпиадах, проходят стажировки в ведущих научных центрах и компаниях-лидерах ИТ-индустрии.

**ФИЗТЕХ-ШКОЛА
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
МОСКОВСКОГО ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА (МФТИ)**

МФТИ занимает 1 место среди технических вузов России в рейтинге лучших университетов мира Times Higher Education по направлениям «Computer Sciences» и «Physical Sciences».

Физтех-школа прикладной математики и информатики МФТИ специализируется на образовании и исследованиях в области чистой и прикладной математики, компьютерных наук и технологий работы с большими данными и искусственным интеллектом. Образовательные программы ФПМИ, создаваемые на стыке этих областей, актуализируются ежегодно. В 2022 году обновлен трек по чистой математике (совместно с МИАН), открыт набор на новые треки по экономике (с РЭШ), олимпиадному программированию, математическому и IT-образованию (с Яндекс, Сириус).

Благодаря системе индивидуальных учебных планов, разнообразию базовых кафедр и лабораторий студенты выстраивают образовательную траекторию в соответствии со своими интересами, а также участвуют в исследовательской работе уже с первых курсов бакалавриата.

Мощная фундаментальная подготовка, закладываемая на младших курсах, позволяет будущим выпускникам не упираться в потолок возможностей и справляться с решением задач любой сложности. А начиная со второго-третьего курса студенты привлекаются к работе на базовых кафедрах от ведущих IT-компаний (Тинькофф, Яндекс, 1С, А4, СБЕР и др.) и институтов РАН (МИАН, ИСП РАН, ВЦ РАН, ИППИ РАН и др.).

Такое сочетание — Академии и Индустрии — не имеет аналогов и позволяет предоставить выпускникам ФПМИ максимальную свободу в выборе дальнейшей карьерной траектории.

Сайт: fpmi.mipt.ru

Вконтакте: vk.com/abitu

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК СПбГУ

— сообщество увлеченных своим делом профессионалов, в которое мы приглашаем Вас! В этом году Санкт-Петербургский Государственный Университет отмечает 300-летие, он был основан одновременно с Академией наук. Мы развиваем традиции Петербургской-Ленинградской математической школы, у истоков которой стояли такие умы как П. Л. Чебышев и Л. Эйлер. Факультет МКН, самый молодой факультет в СПбГУ, в 2019 году объединил новые образовательные программы «Науки о данных» и «Современное программирование» с программами бакалавриата и магистратуры по направлению «Математика», развивающимися с 2015 года совместно с лабораторией им. П. Л. Чебышева. Затем была открыта программа аспирантуры и магистерская программа «Разработка программного обеспечения и науки о данных».

Со студентами работает выдающийся коллектив преподавателей и научных сотрудников, председатель Совета программы «Математика» — филдсовский лауреат С. К. Смирнов. Студенты МКН СПбГУ получают глубокое понимание фундаментальных основ современной математики и спектра возможных приложений, а также полную свободу в выборе своей траектории. С третьего курса студенты выбирают из 100+ спецкурсов примерно половину предметов каждый семестр. Посмотрите сами удобные учебные планы интересующих программ:

Математика bit.ly/syllabus_math

Науки о данных bit.ly/syllabus_maad

Современное программирование bit.ly/syllabus_mp

Студенты активно вовлекаются в научную работу в сотрудничестве с лабораториями СПбГУ, а также в работу над программными продуктами под руководством профессионалов из индустрии. Многие задачи поступают от партнеров факультета, среди которых такие крупные компании

как Газпром нефть, Яндекс, ВКонтакте. Партнеры обеспечивают хорошо обучающихся студентов достойными стипендиями, а также проводят на факультете ивенты и приглашают на практику и стажировки. Выпускники МКН собирают портфолио, с которым могут уверенно чувствовать себя при поступлении на любые магистерские и PhD программы мира или строить карьеру в передовых областях IT-индустрии.

Наш приём $55 + 30 + 30$ человек на три программы позволяет с первого семестра много общаться с каждым студентом и создавать атмосферу, способствующую индивидуальному развитию. Конкурсную ситуацию можно оценить на сайте bit.ly/mkn_entry. Все занятия проходят в центре Санкт-Петербурга — на Васильевском острове, а комфортное общежитие расположено на расстоянии двадцатиминутной прогулки.



joinmkn.ru

Задать вопрос о поступлении в чате: t.me/mathcs_admission
Новости факультета ВКонтакте: vk.com/spbumathcs
E-mail: math-cs@spbu.ru

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru

www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»

www.problems.ru

На сайте www.problems.ru размещаются все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.), Турнира городов и других соревнований, задачи из разных книг. Большинство задач приведено с решениями, есть тематический рубрикатор.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ»

zadachi.mccme.ru

Более 10 000 задач по планиметрии и 3000 задач по стереометрии с решениями, чертежами, атрибутами для тематического поиска и прослеживания взаимосвязей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ

www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях.

Недавно сайту исполнилось 15 лет, открылась его новая версия, каждую неделю появляются новые материалы.

АРХИВ ИЗДАТЕЛЬСТВА «MATHESIS»

maThesis.ru

Одесское издательство «Mathesis» с 1904 по 1925 год выпускало удивительно интересные книги. Некоторые из них стали классикой, часть сейчас незаслуженно забыта.

Ясность и доступность изложения, подбор научно-популярных книг поможет лучше понять математику, физику, астрономию, другие естественные науки, а также историю их познания.

Чтение этих книг заведомо будет полезно молодому поколению, а также тем, кто занимается его образованием и воспитанием.



Книгоиздательство научных и популярно-научных сочинений из области физико-математических наук

МЕХАНИЗМЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

tcheb.ru

В проекте собираются все механизмы, созданные Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821—1894), великим российским математиком. Задача проекта — навсегда сохранить уникальное наследие путем создания высокоточных компьютерных моделей уцелевших механизмов, воссоздать уже утраченные по архивным документам. По договоренности с музеями моделирование производится на основе тщательного измерения всех параметров оригиналов.

К 200-летию Чебышева открылась новая версия сайта.

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЕ ЖУРНАЛЫ В ИНТЕРНЕТЕ

Первые научно-популярные журналы начали выходить в России более двух веков назад. На их страницах выросло не одно поколение российских ученых, инженеров, просто думающих и читающих людей самых разных родов занятий. Сейчас старые номера этих журналов доступны читателям лишь в ничтожном числе библиотек. Электронные архивы призваны сделать их материалы доступными для широкой аудитории.

ВЪСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (1886—1917)

vofem.ru

Журнал, фактически заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год его существования вышло 674 выпуска В.О.Ф.Э.М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое. Среди постоянных рубрик журнала были, например: «Статьи, посвященные вопросам преподавания математики и физики», «Опыты и приборы», «Математические мелочи», «Библиографический отдел».

Статьи составлялись настолько популярно, насколько это возможно без ущерба для научной стороны дела.

ЖУРНАЛ «ПРИРОДА» (1912—)

priroda.ras.ru

Ежемесячный научно-популярный журнал Российской академии наук (РАН) «Природа» — одно из старейших в России изданий. Первый номер этого журнала вышел в 1912 году.

Фактически перед вами огромная энциклопедия по естественным наукам, составленная и регулярно пополнявшаяся отечественными учеными на протяжении 100 лет.

ЖУРНАЛ «КВАНТИК» (2012—)

kvantik.com

В журнале вы найдёте статьи и задачи по математике, лингвистике, физике, химии, биологии и другим естественным наукам. Журнал доступен школьникам 5—8 классов, но может быть интересен любознательным читателям любого возраста.

ЖУРНАЛ «КВАНТ» (1970—)

kvant.ras.ru

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

СБОРНИКИ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

(3 сер., 1997—)

www.mccme.ru/free-books/matpros.html

Сборники с таким названием выходили в 1934—38 и 1957—61 годах. Сборники новой серии играют роль связующего звена между специальной и популярной математической литературой. Математическое содержание «должно быть понятно вдумчивому и настойчивому читателю, даже при отсутствии специальной подготовки». Кроме того в сборниках публикуются материалы о математической жизни, материалы по преподаванию математики.

СЕРИИ КНИГ

БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

mccme.ru/mmmf-lectures/books/

Осенью 1999 года Московское математическое общество, Малый мехмат МГУ и Московский центр непрерывного математического образования возобновили популярные лекции по математике для школьников 9–11 классов. В том же году возникла серия небольших брошюр по материалам избранных лекций — вышло более 40 выпусков.

БРОШЮРЫ ЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ «СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

mccme.ru/dubna/books/

написаны по материалам интенсивных мини-курсов, вплотную подводящих студентов и подготовленных старшеклассников к действительно современной математике.

А на странице mccme.ru/dubna/courses/ доступны видеозаписи многих занятий ЛПШМ.

«ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

ashap.info/Knigi/Matkruzhki/

Главный адресат серии — школьный учитель математики, который понимает, что для пробуждения интереса к математике и для развития учеников школьных уроков часто не хватает. Но брошюры могут быть интересны и полезны и школьникам.

В брошюру по каждой теме входят разработки нескольких занятий с изложением необходимой теории, разобранными примерами, задачами (к ним приводятся подробные решения) и методическими указаниями. Изложение каждой темы начинается практически «с нуля» или, во всяком случае, там, где заканчиваются стандартные школьные учебники.

Двадцать третья летняя школа
«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
имени Виталия Арнольда

для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс) пройдет с 19 по 30 июля 2024 года в Подмоскowie.

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, заполните до 20 мая анкету участника.

Материалы прошедших школ и информацию о ЛШСМ-2024 смотрите на сайте

www.mccme.ru/dubna

Контактный e-mail оргкомитета dubna@mccme.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

6 класс •	3
7 класс •	8
8 класс •	13
9 класс •	19
10 класс •	26
11 класс, первый день •	31
11 класс, второй день •	46
Статистика решения задач •	53

LXXXVII Московская математическая олимпиада
Задачи и решения

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-08-04

**ВСЕ КНИГИ ПО МАТЕМАТИКЕ
В МАГАЗИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА»
В МЦНМО**

В магазине представлен полный ассортимент книг издательства МЦНМО. Здесь также можно найти книги по математике ведущих издательств.

Представлен широкий ассортимент книг для школьников, учителей, руководителей математических кружков. У нас также можно найти учебники и научные монографии ведущих российских и зарубежных математиков.

Магазин открыт в понедельник с 12⁰⁰ до 20⁰⁰,
вторник — пятница с 10⁰⁰ до 20⁰⁰,
в субботу с 11⁰⁰ до 18⁰⁰,
в воскресенье выходной.

Адрес: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Телефон для справок: (495) 745-80-31, (499) 241-72-85.
E-mail: biblio@mccme.ru
Интернет-магазин: biblio.mccme.ru

СХЕМА ПРОЕЗДА В МЦНМО

