ММО-2024, 9 класс, решения

Задача 1. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{c}{d} + \frac{d}{c}.$$

Докажите, что произведение каких-то двух чисел из a, b, c, d равно произведению двух других. *(А. Доледенок, В. Ретинский)*

Решение 1. Перепишем условие в виде

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{c}{d} + \frac{d}{c} \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{b} - \frac{d}{c} = \frac{c}{d} - \frac{b}{a} \;\Leftrightarrow\; \frac{ac - bd}{bc} = \frac{ac - bd}{ad}.$$

Если числитель дробей равен нулю, то $ac = bd$. В противном случае, если у равных дробей равны числители, то у них равны и знаменатели, то есть $bc = ad$. □

Решение 2. Пусть $x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{c}{d}$. Если $x_1 = x_2$, то $ad = bc$, поэтому далее будем считать, что $x_1 \neq x_2$. Обозначим значение левой и правой части равенства через t. Тогда условие переписывается в виде

$$x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2} = t.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $f(x) = t$. Перепишем это уравнение в виде

$$f(x) = t \;\Leftrightarrow\; x + \frac{1}{x} = t \;\Leftrightarrow\; x^2 - tx + 1 = 0.$$

Тогда по теореме Виета

$$x_1 x_2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 1 \;\Leftrightarrow\; ac = bd.$$

□

Задача 2. На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Учитель 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться так, что все 10 раз состязание закончилось вничью (то есть суммы сил детей в командах были равны)? *(М. Евдокимов)*

Ответ: да, могло.

Решение. Пусть силы мальчиков равны 1, 2, …, 12. Предъявим 10 возможных разбиений на две команды с равными силами. Поделим мальчиков на пары с суммарной силой 13:

$$(1, 12),\; (2, 11),\; (3, 10),\; (4, 9),\; (5, 8),\; (6, 7).$$

Пусть в первой команде всегда будет пара $(1, 12)$ и ещё какие-то две пары, а три оставшиеся пары будут во второй команде. Тогда суммарная сила каждой команды будет равна $3 \cdot 13 = 39$. Две пары из пяти можно выбрать $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ способами. Таким образом мы получили 10 возможных разбиений на команды с равными силами. □

Задача 3. Петя загадал положительную несократимую дробь $x = \frac{m}{n}$. За один ход Вася называет положительную несократимую дробь y, не превосходящую 1, и Петя в ответ сообщает Васе числитель несократимой дроби, равной сумме $x + y$. Как Васе за два хода гарантированно узнать x? *(М. Дидин)*

Решение 1. Как известно, для целых чисел a, b и k выполнено равенство

$$\text{НОД}(a + kb, b) = \text{НОД}(a, b).$$

Пусть первым ходом Вася назовёт дробь $y = \frac{1}{1}$. Петя вычислит дробь $x + y = \frac{m+n}{n}$. Поскольку числа m и n взаимно просты, то

$$\text{НОД}(m + n, n) = \text{НОД}(m, n) = 1,$$

то есть дробь несократима, и Петя сообщит число $a = m + n$.

Пусть вторым ходом Вася назовёт дробь $y = \frac{1}{a}$. Петя вычислит дробь $x + y = \frac{am+n}{an}$. Эта дробь несократима, поскольку

$$\text{НОД}(am + n, a) = \text{НОД}(n, a) = \text{НОД}(n, m + n) = 1$$

и аналогично $\text{НОД}(am + n, n) = 1$. Следовательно, Петя сообщит число $b = am + n$.

Поделив b на a с остатком, Вася узнает n. Вычислив разность $a - n$, Вася узнает m. Таким образом, Вася сможет узнать загаданную дробь. $\square$

Решение 2. Как и в первом решении, пусть Вася первым ходом назовёт дробь $y = \frac{1}{1}$ и получит в ответ от Пети число $a = m + n$.

Пусть вторым ходом Вася назовёт дробь $y = \frac{1}{(a!)^2}$. Петя вычислит дробь

$$x + y = \frac{m \cdot \frac{(a!)^2}{n} + 1}{(a!)^2} = \frac{m \cdot a! \cdot \frac{a!}{n} + 1}{(a!)^2}.$$

Допустим, дробь можно сократить на какое-то простое число p. Тогда p — это делитель числа $a!$. Но $m \cdot a! \cdot \frac{a!}{n}$ делится на p, поэтому весь числитель на p не делится, противоречие. Следовательно, Петя сообщит Васе число $b = m \cdot \frac{(a!)^2}{n} + 1$.

Вычислив неполное частное при делении b на $a!$, Вася узнает число $m \cdot \frac{a!}{n}$. Поделив это число на $a!$, Вася узнает $\frac{m}{n}$, то есть загаданную дробь. $\square$

Замечание. Существует множество других примеров дробей, которые может назвать Вася. Например, дроби $\frac{1}{1}$ и $\frac{1}{2}$.

Задача 4. На описанной окружности треугольника ABC отметили середины дуг BAC и CBA — точки M и N соответственно, и середины дуг BC и AC — точки P и Q соответственно. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке A_1 и продолжений сторон AC и AB. Окружность ω_2 касается стороны AC в точке B_1 и продолжений сторон BA и BC. Оказалось, что A_1 лежит на отрезке NP. Докажите, что B_1 лежит на отрезке MQ. *(А. Доледенок)*

Решение. Временно забудем о том, что, что точка A_1 лежит на отрезке NP. Пусть I_A — центр ω_1. Обозначим через X точку пересечения прямых BC и PN.

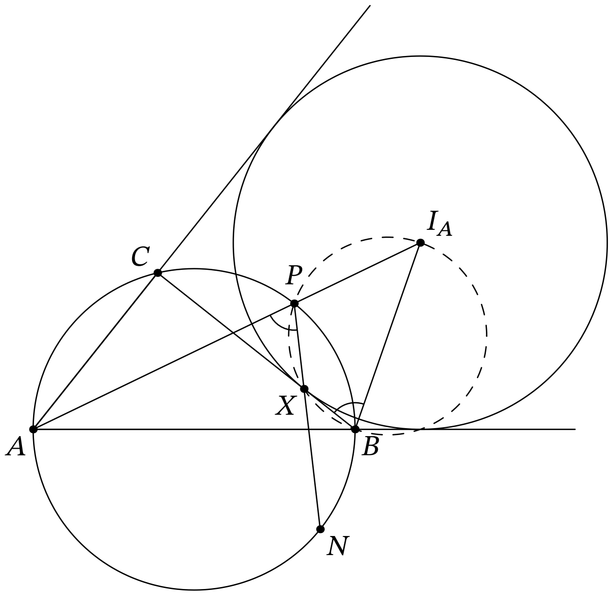

Рис. 1: к решению задачи 4

Так как I_A лежит на биссектрисе внешнего угла B, то $\angle CBI_A = \frac{180° - \angle B}{2} = 90° - \beta$. Так как I_A лежит на биссектрисе угла A, то точки A, P, I_A лежат на одной прямой. Тогда

$$\angle APN = \frac{\overset{\frown}{AN}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{4} = \frac{360° - \overset{\frown}{AC}}{4} = 90° - \frac{\angle B}{2}.$$

Таким образом, $\angle CBI_A = \angle APN$, то есть четырёхугольник I_APXB вписанный.

Вернёмся к решению задачи. Точки X и A_1 совпадают тогда и только тогда, когда $\angle BXI_A = \angle BA_1I_A = 90°$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что $\angle BPI_A = 90°$. Но тогда $\angle ACB = \angle APB = 90°$. Проведя аналогичные рассуждения, получим, что принадлежность точек Q, B_1, M одной прямой также эквивалентна условию, что угол C прямой. □

Решение 2. Как и в прошлом решении, временно забудем о том, что точка A_1 лежит на отрезке NP. Воспользуемся двумя известными фактами.

- *Лемма о трезубце.* Точка P равноудалена от точек B, C, I_A и центра вписанной окружности треугольника ABC.
- *Внешняя лемма о трезубце.* Точка N равноудалена от точек A, C, I_A и центра окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон CA и CB.

Из этих утверждений следует, что $NC = NI_A$ и $PC = PI_A$, а значит PN является серединным перпендикуляром к отрезку CI_A.

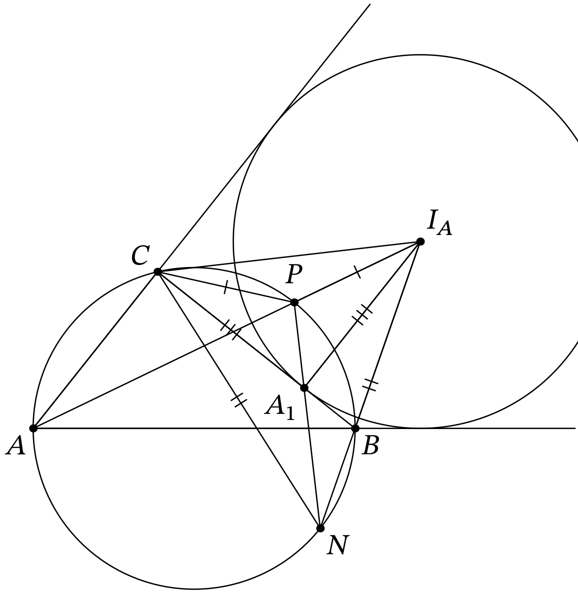

Рис. 2: к решению задачи 4

Вернёмся к решению задачи. Точка A_1 лежит на прямой PN тогда и только тогда, когда $CA_1 = A_1I_A$, то есть треугольник CA_1I_A является равнобедренным и прямоугольным. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $\angle A_1CI_A = 45°$, что эквивалентно тому, что $\angle BCA = 90°$.

Осталось, как и в концовке прошлого решения, сослаться на то, что аналогично устанавливается эквивалентность утверждений, что $\angle BCA = 90°$ и что точки Q, B_1, M лежат на одной прямой. □

Решение 3. Приведём решение, в котором не используется в качестве вспомогательного факта, что угол C прямой.

Пусть I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, D — точка касания этой окружности со стороной AB, E — точка пересечения отрезков CI и PQ. Обозначим через Y точку пересечения прямых AC и MQ. Требуется доказать, что точки B_1 и Y совпадают.

Мы будем пользоваться следующими известными фактами.

- Прямые NP и MQ параллельны биссектрисе угла C, а прямая PQ — перпендикулярна.
- Выполнены равенства $AD = CB_1$ и $BD = CA_1$.

Поскольку $\angle CPQ = \angle CBQ = \angle IBA$ и аналогично $\angle CQP = IAB$, то треугольники IBA и CPQ подобны. Тогда D и E — соответствующие точки в подобных треугольниках IBA и CPQ, поэтому $PE/EQ = BD/DA$. Так как длина отрезка PE равна расстоянию между

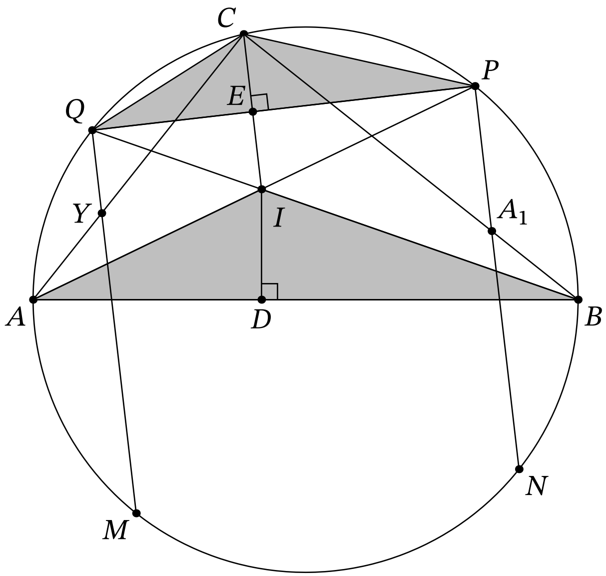

Рис. 3: к решению задачи 4

параллельными прямыми CI и NP, то

$$PE = CA_1 \cdot \cos \frac{180 - \angle C}{2} = CA_1 \cdot \sin \frac{\angle C}{2}.$$

Аналогично $QE = CY \cdot \sin \frac{\angle C}{2}$, поэтому

$$\frac{CA_1}{CY} = \frac{PE}{EQ} = \frac{BD}{DA}.$$

Подставив $CA_1 = BD$, получим

$$\frac{CA_1}{CY} = \frac{BD}{DA} \Leftrightarrow \frac{BD}{CY} = \frac{BD}{DA} \Leftrightarrow CY = DA.$$

Но $DA = CB_1$, то есть $CB_1 = CY$. Следовательно, точки Y и B_1 совпадают. □

Замечание 1. В случае прямого угла C прямая NP проходит не только через точку A_1, но и через точку касания ω_1 с продолжением стороны AC.

Замечание 2. Верно аналогичное утверждение точек касания вписанной окружности с катетами. А именно, прямая PQ проходит через точки касания вписанной в треугольник ABC окружности с катетами AC и BC.

Задача 5. В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две из которых не находятся на одной высоте. Жук ползёт снизу вверх; когда он встречает палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого столбика, то он закончит свой путь на девятом столбике. Всегда ли можно убрать одну из палочек так, чтобы жук, начав внизу первого столбика, в конце пути оказался наверху пятого столбика?

Например, если палочки расположены как на рисунке, то жук будет ползти по сплошной линии. Если убрать третью палочку на пути жука, то он поползёт по пунктирной линии.

(Г. Караваев)

Ответ: да, всегда.

Решение. Посадим по жуку на основание каждого столбика. Пусть они будут ползти вверх с одинаковыми скоростями, а на горизонтальных палочках будут мгновенно меняться местами. Тогда в каждый момент времени по каждому столбику ползёт один жук. В частности, на каждом столбике финиширует один из жуков.

Назовём жука, стартовавшего с первого столбика, *красным*, а финишировавшего на вершине пятого столбика — *зелёным*. Красный жук стартует левее зелёного, а финиширует правее. Значит, хотя бы на одной из палочек они должны поменяться местами. Уберём эту палочку. После этого красный жук поползёт по маршруту зелёного, то есть закончит на пятом столбике. □

Замечание. Ту же идею можно было оформить по-другому. Изначально посадим синего жука на вершину пятого столбика, и пусть он ползёт сверху вниз. Его траектория пересечётся с траекторией красного жука по горизонтальной палочке. Эту палочку и уберём.

Задача 6. На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется *неудачной*, если для каждого натурального k от 1 до 99 сумма чисел на верхних k карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить? *(А. Кушнир)*

Ответ: 98!.

Решение. Пример. Пусть на карточках написаны числа $\sqrt{2}, 1, 2, \ldots, 98$. Тогда в неудачной стопке карточка $\sqrt{2}$ должна находиться сверху, а остальные карточки можно расположить любым из 98! способов. В этом случае всякая сумма чисел на нескольких верхних карточках будет иметь вид $\sqrt{2}+n$, где n — натуральное число, то есть будет иррациональна.

Оценка. Разобьём все стопки карточек на 98! групп, в каждой из которых одна стопка получается из другой циклической перестановкой (то есть перекладыванием нескольких верхних карточек вниз стопки). Каждая группа состоит из 99 стопок. Докажем, что каждая группа содержит хотя бы одну неудачную стопку.

Предположим, что нашлась группа без неудачных стопок. Выберем одну из стопок и расположим карточки из неё по кругу в том же порядке, в котором они лежат в стопке: $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$. Тогда все стопки из группы будут иметь вид $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{99}, a_1, \ldots, a_{i-1}$ для i от 1 до 99.

Начнём идти от карточки a_1 по часовой стрелке до тех пор, пока сумма чисел $a_1+a_2+\ldots+a_j$ на пройденных карточках не станет рациональной. Далее начнём идти от a_{j+1} до тех пор, пока сумма чисел на пройденных карточках не станет рациональной. Такой момент настанет, потому что соответствующая стопка, начинающаяся с a_{j+1}, не является неудачной. Проделаем описанную операцию 100 раз. По принципу Дирихле найдётся карточка a_t, с которой начинали отсчитывать сумму хотя бы дважды. Оставим только шаги процесса между первым и вторым отсчитыванием от карточки a_t (включая первое, но не включая второе).

Посмотрим на сумму S пройденных чисел (каждое число считается столько раз, сколько его прошли). С одной стороны, S рационально, так как мы брали отрезки карточек с рациональной суммой. С другой стороны, мы начали с карточки a_t, а закончили карточкой a_{t-1}, то есть прошли несколько полных кругов. Из этого следует, что сумма всех пройденных чисел будет равна nS', где n — количество пройденных кругов, а S' — сумма чисел на всех карточках. Однако S' по условию иррационально, откуда nS' также иррационально. Противоречие.

Таким образом, в каждой группе есть хотя бы одна неудачная стопка. Тогда общее количество неудачных стопок не меньше, чем $99! \cdot \frac{1}{99} = 98!$. □

Замечение. Существуют и другие примеры. Например, можно взять карточки

$$1+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ \ldots,\ 50+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2},\ \ldots,\ 49-\sqrt{2}.$$

Назовём первые 50 карточек *положительными*, а остальные — *отрицательными*. В неудачной стопке, состоящей из этих карточек, первая карточка должна быть положительной, и для любого k среди первых k карточек положительных карточек должно быть больше, чем отрицательных. Количество неудачных стопок в этом случае также будет равно 98!.