Цепные дроби и числа Маркова (азбука Морзе и динамические системы)

А.И. Аптекарев

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

Лекция закрытия

LXXXVII Московской Математической Олимпиады

19.05.2024

План

- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$

- Приближение действительных чисел рациональными, непрерывные дроби.

- Медленно приближаемые иррациональности: золотое сечение, цепочки (граф) Маркова.

- Непрерывные дроби для чисел Маркова, иттерации дробно-линейных отображений и упорядочение бесконечных Морзе-сигналов.

- Функциональные непрерывные дроби; Паттерны генетического кода и других конечно-буквенных сообщений.

Числа:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\{\text{иррациональные числа}\} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$\{\text{трансцендентные числа числа}\} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$$

Приближение иррациональных чисел рациональными:

- Скорость приближения $\forall\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}, \qquad C \le 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \text{ б.м. } p, q \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

- Алгоритм Евклида и непрерывные (цепные) дроби:

$$a_0 := [\alpha],\ a_1 := [(\alpha - a_0)^{-1}],\ \ldots$$

$$\alpha \sim a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots], \quad [a_0; a_1, \ldots, a_n] =: \frac{p_n}{q_n}$$

- Основные свойства:

1) Рекурренции $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}, \quad q_0 = 0,\ q_1 = 1.$

2) Наилучшие приближения α.

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \quad \forall\, q < q_n.$$

(среди дробей с непревышающими q_n знаменателями)

Приближение иррациональных чисел рациональными:

- Скорость приближения $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}, \qquad C \le 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \text{ б.м. } p, q \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

- Алгоритм Евклида и непрерывные (цепные) дроби:

$$a_0 := [\alpha],\ a_1 := [(\alpha - a_0)^{-1}],\ \ldots$$

$$\alpha \sim a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots], \quad [a_0; a_1, \ldots, a_n] =: \frac{p_n}{q_n}$$

- Основные свойства:

1) Рекурренции $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}, \quad q_0 = 0,\ q_1 = 1.$

2) Наилучшие приближения α.

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \quad \forall\, q < q_n.$$

(среди дробей с непревышающими q_n знаменателями)

Приближение иррациональных чисел рациональными:

- Скорость приближения $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}, \qquad C \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \text{ б.м. } p, q \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

- Алгоритм Евклида и непрерывные (цепные) дроби:

$$a_0 := [\alpha],\ a_1 := [(\alpha - a_0)^{-1}],\ \ldots$$

$$\alpha \sim a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots], \quad [a_0; a_1, \ldots, a_n] =: \frac{p_n}{q_n}$$

- Основные свойства:

1) Рекурренции $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}, \quad q_0 = 0,\ q_1 = 1.$

2) Наилучшие приближения α.

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \quad \forall\ q < q_n.$$

(среди дробей с непревышающими q_n знаменателями)

Спектр Маркова-Лагранжа

- Точная константа в $(*)$ и золотое сечение:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}, \qquad C = 1/\sqrt{5}, \qquad \alpha = (\sqrt{5}-1)/2$$

- Определение точки спектра М-Л:

$$\lambda(\alpha) = \sup \tau \quad : \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{\tau q^2} \text{ для б.м. } p, q \in \mathbb{Z}.$$

Другими словами

$$\lambda(\alpha)^{-1} = \liminf_{q \to +\infty} q^2 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \liminf_{n \to +\infty} q_n^2 \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

- Спектр М-Л: $\Lambda := \{\lambda(\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

Спектр Маркова-Лагранжа

- Точная константа в $(*)$ и золотое сечение:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}, \qquad C = 1/\sqrt{5}, \qquad \alpha = (\sqrt{5}-1)/2$$

- Определение точки спектра М-Л:

$$\lambda(\alpha) = \sup \tau \ : \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{\tau q^2} \text{ для б.м. } p, q \in \mathbb{Z}.$$

Другими словами

$$\lambda(\alpha)^{-1} = \liminf_{q\to+\infty} q^2\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \liminf_{n\to+\infty} q_n^2\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

- Спектр М-Л: $\Lambda := \{\lambda(\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

Спектр Маркова-Лагранжа

- Точная константа в (∗) и золотое сечение:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}, \qquad C = 1/\sqrt{5}, \qquad \alpha = (\sqrt{5}-1)/2$$

- Определение точки спектра М-Л:

$$\lambda(\alpha) = \sup\ \tau \ : \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{\tau q^2} \text{ для б.м. } p, q \in \mathbb{Z}.$$

  Другими словами

$$\lambda(\alpha)^{-1} = \liminf_{q\to+\infty} q^2\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \liminf_{n\to+\infty} q_n^2\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

- Спектр М-Л: $\Lambda := \{\lambda(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$

Структура спектра $\Lambda := \{\lambda(\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{q_n |q_n \alpha - p_n|}.$$

Дискретный спектр $\subset [2.23, 3]$:

$$\{\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{221}/5, \quad \ldots \to 3\}.$$

«Канторово множество» $\subset [3, 3.6]$:

$$\text{пример лакуны} : [3.1298, 3.1622]$$

Непрерывный спектр: $= [3.6, \infty]$.

Теорема и дерево Маркова

Теорема: $\lambda(\alpha) = \left(9 - 4m^{-2}\right)^{1/2}$, где m :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3m\, m_1\, m_2, \quad m \geq \max(m_1, m_2), \quad m = 1, 2, \ldots$$

Граф Маркова (Дерево?)

- $(1, 1, 1)$
  - $(2, 1, 1)$
    - $(5, 1, 2)$
      - $(13, 1, 5)$
        - $(34, 1, 13)$
        - $(194, 13, 5)$
      - $(29, 5, 2)$
        - $(433, 5, 29)$
        - $(169, 29, 2)$

Паттерны цепной дроби и точки спектра

- $$\lambda(\alpha) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{q_n|q_n\alpha - p_n|}.$$

  Другая формула для точки спектра $\alpha = [0; a_1, a_2, ...]$

  $$\lambda(\alpha) = \limsup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{ [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1] + [0; a_{n+1}, ...] \right\}.$$

- ДЛО:

  $$S_i(x) = \frac{1}{a_i + x}, \quad S_i^{-1}(w) = -a_i + \frac{1}{w}.$$

  итерации

  $$D_n = S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_n, \quad D_n^{-1} = S_n^{-1} \circ S_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ S_1^{-1}.$$

  еще одна версия формулы:

  $$\lambda(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(\infty) = \limsup_{n\to\infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(z), \; z \neq \alpha$$

Паттерны цепной дроби и точки спектра

- $$\lambda(\alpha) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{q_n|q_n\alpha - p_n|}.$$

  Другая формула для точки спектра $\alpha = [0; a_1, a_2, ...]$

  $$\lambda(\alpha) = \limsup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{ [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1] + [0; a_{n+1}, ...] \right\}.$$

- ДЛО:

  $$S_i(x) = \frac{1}{a_i + x}, \quad S_i^{-1}(w) = -a_i + \frac{1}{w}.$$

  итерации

  $$D_n = S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_n, \quad D_n^{-1} = S_n^{-1} \circ S_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ S_1^{-1}.$$

  еще одна версия формулы:

  $$\lambda(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(\infty) = \limsup_{n\to\infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(z), \ z \neq \alpha$$

Паттерны и динамические системы

- $$\lambda(\alpha) = \limsup_{n\in\mathbb{Z}} \Big\{ [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1] + [0; a_{n+1}, ...] \Big\}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(z), \quad z \neq \alpha$$

- ИФ Сиситема: $S_i(x) \in \{ S^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}, S^{(2)}(x) = \frac{1}{2+x} \}$.

$$D_n = S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_n.$$

- $\mathbf{A}$ - min замкн. мн-во : $S_i(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}$; $\quad \mathbf{J}$ - (...) : $S_i^{-1}(\mathbf{J}) \subseteq \mathbf{J}$.

- $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ инвариантные множества: $\mathbf{J} = -\frac{1}{\mathbf{A}}$.

- Свойства $\mathbf{A}$: $\quad$ 1) $\mathbf{A} = \{\alpha : a_i \in \{1, 2\}\}$.

2) $A^0 := \left([0, \overline{2,1}], [0, \overline{1,2}]\right)$; $A_{a_j} := S_j(A^0))$; $A_{a_k, a_j} := S_k(A_{a_j})$....

3) $\alpha = [0; a_1, a_2, ...] \in A_{a_1, a_2, ..., a_n} \subset A_0$.

Строение **A**.

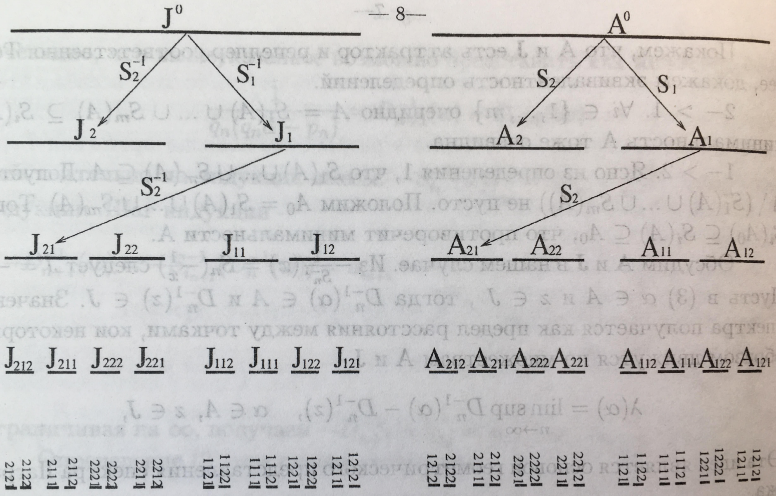
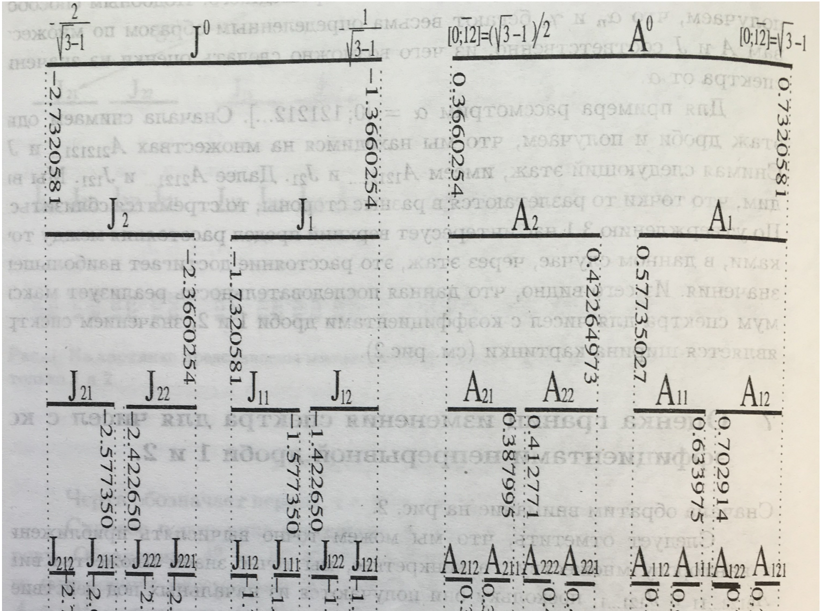


Рис. 1: На картинке представлены множества **A** и **J** для α, имеющих в своей цепной дроби только 1 и 2.

Динамика: $\lambda(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} D_n^{-1}(\alpha) - D_n^{-1}(z),\ z \neq \alpha$

z кладем в J^0, $\alpha \in \mathbf{A}$ и поехали!



- Функциональные непрерывные дроби;

Паттерны генетического кода

Функциональные непрерывные дроби $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}$;

- Алгоритм Евклида. Пусть [.] - полиномиальная часть $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=-p}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} =: [\widetilde{f}(z)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}$$

$$f(z) = \frac{1}{f^{-1}} = \frac{1}{[f^{-1}] + f_1} = \frac{1}{[f^{-1}] + \frac{1}{[f_1^{-1}]+f_2}} =: [p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots];$$

$$\pi_n(z) := [p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, , p^{(n-1)}] \qquad p^{(j)}(z) \in \mathcal{P}.$$

- Нормальный случай $p^{(j)} \in \mathcal{P}_1$

$$\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} := [p_1^{(0)}, p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_1^{(n-1)}] = \cfrac{1}{z - a_0 - \cfrac{b_0^2}{z - a_1 - \cdots - \cfrac{b_{n-2}^2}{z - a_{n-1}}}}$$

- Рекуррентные соотношения:

$$Q_{n+1}(z) = (z - a_n) Q_n(z) - b_{n-1}^2 Q_{n-1}(z), \quad Q_0 = 1, \quad Q_1 = z - a_0.$$

Дискретный оператор Шредингера J

Перенормируем многочлены $Q_n = z^n + \dots$

$$q_n := (b_0 b_1 \cdots b_{n-1}) Q_n, \quad q_0 = Q_0 = 1$$

Мн-ны q_n удовлетворяют реккурентным соотношениям:

$$b_{n-1} q_{n-1} + a_n q_n + b_n q_{n+1} = z q_n$$

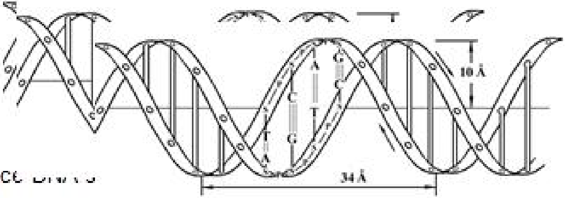
В матричном виде (матрица Якоби) $J\vec{q} = \vec{q}$:

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ . \\ . \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

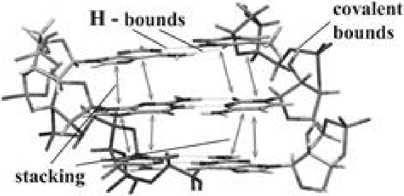
В случае, когда $b_n > 0, \ \ a_n \in \mathbb{R}$ матрица Якоби определяет самосопряженный дискретный оператор Шредингера J.
При этом справедливо:

$$\pi_n(z) \underset{\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Sp}(J)}{\rightrightarrows} f(z) = \int \frac{d\mu(\lambda)}{z - \lambda}$$

Basic linear biopolymer - DNA

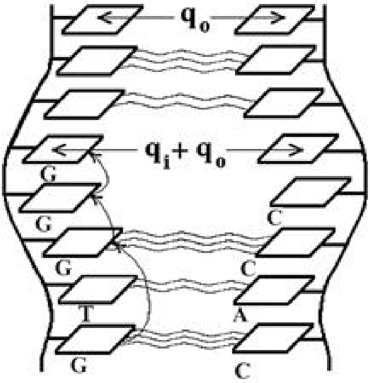


Space



Relative space positions of H – bounds and stacking interactions in DNA

Mechanical DNA models



Covalent bound ~ 3,6 eV
Stacking interaction ~ 0,14÷0,63 eV
H-bound ~ 0,13÷0,26 eV

Electron in a rigid chain

$$\hat{H} = \sum_{n,m} \nu_{n,m} |n\rangle\langle m|$$

Homogeneous chain in the nearest neighbor approximation

$$\left(\nu_{n,n\pm1} = \nu,\ \nu_{n,m} = 0 \quad m \neq n \pm 1\right): \qquad |\Psi\rangle = \sum_n b_n |n\rangle$$

Schroedinger equation:

$$i\dot{b}_n = \nu\left(b_{n+1} + b_{n-1}\right) \qquad b_n(t) = e^{-iW_k T} R_{n,k} \quad R_{n,k} = \frac{e^{ikn}}{\sqrt{N+1}}$$

For Poly G/Poly C chain:

$$\boxed{W_k = 2\nu \cos k, \quad k = \pm\frac{2\pi l}{N}, \quad l = 0,1,2,\ldots \frac{N}{2}}$$

$\Delta W = 4\nu$ - conductivity band width.

Regular chains

Band structure for Poly(GT)/Poly(CA)

$$n = 2j: \quad \nu_{2j,2j} = 0, \quad \nu_{2j,2j+1} = \nu_1, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$n = 2j+1: \quad \nu_{2j+1,2j+1} = \alpha_T, \quad \nu_{2j,2j-1} = \nu_2$$

Eigen value equations:

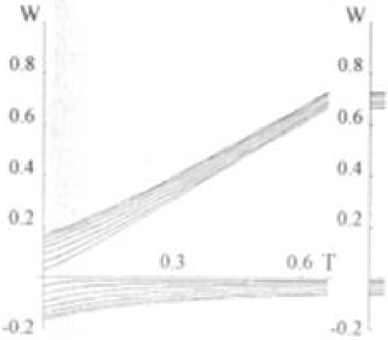
$$W_k R_{2j,k} = \nu_1 R_{2j+1,k} + \nu_2 R_{2j-1,k}$$

$$W_k R_{2j+1,k} = \alpha_T R_{2j+1,k} + \nu_2 R_{2j+2,k} + \nu_1 R_{2j,k}$$

$$R_{2j+1,k} = u_2 \exp[ik(2j+1)], \quad R_{2j,k} = u_1 \exp[ik(2j)],$$

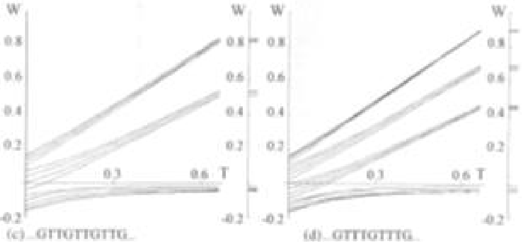
$$W_k^{\pm} = \frac{\alpha_T}{2} \pm \sqrt{(\alpha_T/2)^2 + \left(\nu_1^2 + \nu_2^2 + 2\nu_1\nu_2 \cos 2k\right)^2}$$

Poly(GT)/Poly(CA)



(b) ...GTGTGTG...

Band structures of various regular chains



For regular chains, that contain **m** sites in an elementary cell, there are **m** different branches determining their band structure.

V.D.Lakhno in "Modern Methods for Theoretical Physical Chemistry of Biopolymers", Ed. By E.B.Staricov , J.P.Lewis, S.Tanaka, (2006), Elsevier

V.D.Lakhno, V.B.Sultanov, Theor.Math.Phys., v.176, 1194, (2013)