

**Задача 1.** Можно ли расставить в вершинах и в серединах рёбер правильного октаэдра по одному натуральному числу от 1 до 18 так, чтобы все числа были различны, а в каждой вершине стояло число, равное сумме четырёх чисел, стоящих в серединах исходящих из этой вершины рёбер? (М. Евдокимов)

*Решение.* Предположим, что требуемая расстановка существует. Далее можно рассуждать по-разному.

*Первый способ.* Рассмотрим сумму чисел в двух противоположных вершинах октаэдра. С одной стороны, эта сумма равна сумме чисел, стоящих в серединах восьми рёбер, исходящих из этих двух вершин, а поскольку все эти числа различны, она не меньше, чем  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ . С другой стороны, сумма двух различных чисел, не превосходящих 18, не больше, чем  $17 + 18 = 35$ . Противоречие.

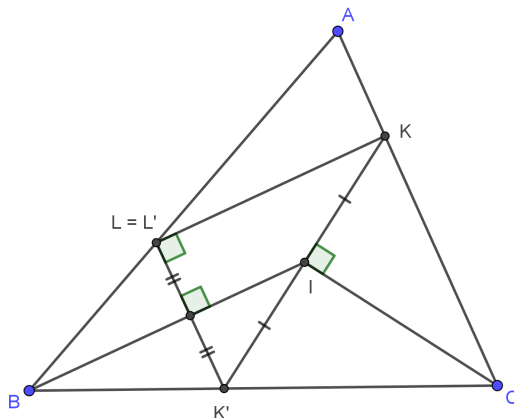
*Второй способ.* Поскольку у октаэдра 12 рёбер, а все расставленные числа различны, в середине хотя бы одного из рёбер стоит число, не меньшее 12. Но тогда в каждой из вершин, соединённых этим ребром, должно стоять число, не меньшее  $12 + 1 + 2 + 3 = 18$ , что невозможно.

*Третий способ.* Заметим, что в шести вершинах октаэдра могут стоять только числа 13, 14, 15, 16, 17, 18. Действительно, если бы какое-то из них стояло в середине ребра, то в вершине, являющейся концом этого ребра, стояло бы число, не меньшее  $13 + 1 + 2 + 3 = 19$ . Сумма чисел от 13 до 18 нечётна, так как среди них ровно три нечётных. Но из условия следует, что сумма чисел, стоящих в вершинах октаэдра, должна быть равной удвоенной сумме чисел, стоящих в серединах рёбер, и поэтому чётной. Противоречие.

*Ответ:* нет, нельзя.

**Задача 2.** Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . На сторонах  $AC$  и  $AB$  взяли точки  $K$  и  $L$  соответственно так, что прямая  $IK$  перпендикулярна  $CI$ , а  $KL$  параллельна  $BI$ . Докажите, что треугольник  $LKI$  — равнобедренный. (М. Евдокимов)

*Решение. Первый способ.* Пусть точка  $K'$  симметрична точке  $K$  относительно биссектрисы  $CI$ , а точка  $L'$  симметрична точке  $K'$  относительно биссектрисы  $BI$ . Тогда  $BI$  проходит через середины отрезков  $K'L'$  и  $KK'$ , а значит содержит среднюю линию треугольника  $K'L'K$ , параллельную стороне  $K'L'$ . Поэтому прямая  $KL'$  параллельна  $BI$ , откуда следует, что точка  $L$  из условия совпадает с  $L'$ . Так как  $BI$  перпендикулярна  $K'L'$ , получаем также, что угол  $KLK'$  равен  $90^\circ$ . Осталось заметить, что  $LI$  является медианой в прямоугольном треугольнике  $KLK'$ , а значит  $LI = KI$ , что и требовалось доказать.



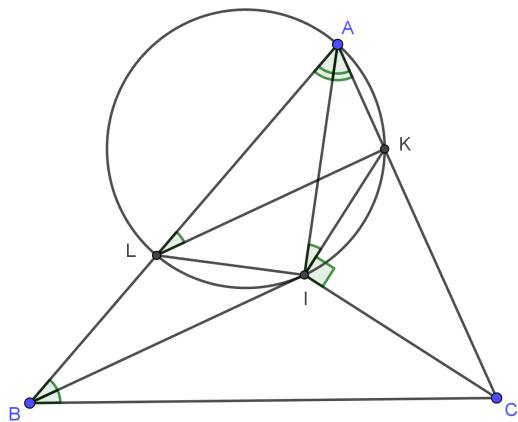
Второй способ. Заметим, что

$$\angle AIC = 180^\circ - \angle IAC - \angle ICA = 180^\circ - \left( \frac{\angle BAC + \angle BCA}{2} \right) = 180^\circ - \left( 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2} \right) = 90^\circ + \frac{\angle ABC}{2}.$$

Тогда

$$\angle AIK = \angle AIC - \angle CIK = \angle AIC - 90^\circ = \frac{\angle ABC}{2} = \angle ABI = \angle ALK,$$

откуда следует, что точка  $A, K, L$  и  $I$  лежат на одной окружности  $\omega$ . Поскольку  $AI$  — биссектриса угла  $KAL$ , то  $I$  — середина дуги  $LK$  окружности  $\omega$ , откуда следует, что  $IK = IL$ .



**Задача 3.** Петя и Вася играют в следующую игру. Сначала они пишут по единице, каждый на своей доске. Далее они по очереди (начинает Петя) заменяют каждое своё число, умножая его либо на 2, либо на 3, причём после каждого хода числа, записанные на досках, должны быть различными. Пусть  $a$  — количество натуральных делителей числа Пети после его 100-го хода, а  $b$  — количество натуральных делителей числа Васи после его 100-го хода. По итогам игры Петя получает  $|a - b|$  фантиков. При каком наибольшем натуральном  $n$  Петя может действовать так, чтобы гарантированно получить не менее  $n$  фантиков вне зависимости от действий Васи? (И. Михайлов)

*Решение. Стратегия Пети.* Покажем, как Пете действовать так, чтобы по итогам игры получить 99 фантиков. Пусть Петя на  $k$ -м ходу заменяет своё число на  $2 \cdot 3^{k-1}$  (это возможно, поскольку для каждого натурального числа  $a$  после  $a$  ходов Пети и  $(a - 1)$ -го хода Васи в разложении числа Пети на простые множители участвует ровно на один сомножитель больше, чем в разложении числа Васи, поэтому их числа после хода Пети совпасть не могут). Индукцией по  $k$  докажем, что тогда после  $k$  ходов Васи на его доске написано число  $3^k$ .

*База:* при  $k = 1$  Васе запрещено писать число 2, поэтому он запишет число 3.

*Переход:* если после  $k$  ходов на досках Пети и Васи записаны числа  $2 \cdot 3^{k-1}$  и  $3^k$  соответственно, то после  $(k + 1)$ -го хода Пети на его доске будет  $2 \cdot 3^k$ . Тогда Вася не сможет умножить своё число на 2, поскольку в таком случае числа на досках оказались бы равными, то есть запишет число  $3^{k+1}$ , что и требовалось доказать.

В соответствии с доказанным утверждением после окончания игры на досках Пети и Васи будут записаны числа  $2 \cdot 3^{99}$  и  $3^{100}$  соответственно. Значит, Петя получит  $2 \cdot 100 - 101 = 99$  фантиков.

*Стратегия Васи.* Покажем теперь, как Васе действовать так, чтобы по итогам игры Петя получил не больше 99 фантиков. Без ограничения общности предположим, что первым ходом Петя записал на своей доске число 2. Тогда пусть Вася своим первым ходом запишет число 3, а далее на  $k$ -м ходу

(для каждого  $k = 2, 3, \dots, 100$ ) умножает своё число на то же число (2, либо 3), на которое умножает своё число Петя на его  $k$ -м ходу (тем самым после каждого хода Васи отношение его числа к числу Пети будет оставаться равным  $\frac{3}{2}$ ).

Тогда для каждого  $k = 2, \dots, 100$  если после  $k$  ходов Пети на его доске записано число  $2 \cdot 3^m \cdot 2^n$ , где  $m + n = k - 1$ , то после  $k$  ходов Васи на его доске записано число  $3 \cdot 3^m \cdot 2^n$ , отличное от  $2 \cdot 3^m \cdot 2^n$ . Пусть после 100 ходов Пети на его доске записано число  $3^m \cdot 2^n$  для некоторых целых чисел  $n \geq 1$  и  $m \geq 0$  с суммой  $m + n = 100$ . Тогда в соответствии с предыдущим замечанием после 100 ходов Васи на его доске будет записано число  $3^{m+1} \cdot 2^{n-1}$ . Значит, по итогам игры Петя получит не более

$$|(n+1) \cdot (101-n) - n \cdot (102-n)| = |101 + 100n - n^2 - 102n + n^2| = |101 - 2n| \leq 99$$

фантиков, где последнее неравенство выполнено, поскольку  $100 \geq n \geq 1$ .

*Ответ:* 99.

**Задача 4.** В гостинице  $a > 1$  этажей, на каждом этаже  $b$  одноместных номеров. На математический конгресс приехало  $ab$  математиков. Оказалось, что каждому математику на каждом этаже нравится ровно один номер. Докажите, что число способов поселить всех математиков в гостиницу так, чтобы каждому нравился его номер, чётно. (В. Ретинский)

*Решение.* Зафиксируем произвольное расселение на всех этажах выше второго. Покажем, что количество способов дополнить его до расселения всех математиков чётно.

Построим граф, в котором  $2b$  вершин соответствуют номерам на первых двух этажах. Для каждого математика проведём ребро, соединяющее два подходящих ему номера. Получим граф  $G$ , в котором  $2b$  вершин и  $2b$  рёбер.

Если в графе  $G$  есть висячая вершина  $v$ , то в соответствующий номер можно поселить только одного математика. Поселим математика в этот номер (в любом подходящем расселении он живёт в этом номере), а из графа  $G$  удалим вершину  $v$  и исходящее из неё ребро.

Будем продолжать процесс, пока в графе не останется висячих вершин. После завершения процесса мы получим непустой граф  $G'$ . Если в графе  $G'$  есть изолированная вершина  $v$ , то расселение невозможно, поскольку мы получили, что в некотором номере при любом подходящем расселении не живёт ни один математик. Тогда количество способов расселить всех равно 0, что является чётным числом.

Иначе в графе  $G'$  степень каждой вершины не меньше двух. Заметим, что в графе  $G'$  поровну вершин и рёбер, так как их изначально поровну, и каждым шагом мы удаляем одну вершину и одно ребро. Отсюда следует, что степени всех вершин равны двум. Из леммы о хороводах следует, что граф  $G'$  является объединением нескольких непересекающихся циклов. Нетрудно видеть, что для каждого цикла есть ровно два способа сопоставить вершинам-номерам рёбра-математиков. Действительно, при выборе номера для одного из математиков, расселение остальных математиков данного цикла определяется однозначно. Тогда если граф  $G'$  состоит из  $c \geq 1$  циклов, то количество способов расселить математиков равняется  $2^c$ , что является чётным числом.

Мы доказали, что для каждого выбора расселения во все дни после второго количество способов дополнить его до полного расселения чётно. Осталось просуммировать полученные величины по всем выборам расселения во все дни после второго. С одной стороны, мы получим искомое количество способов расселить всех. С другой стороны, так как сумма чётных чисел чётна, то результат будет чётным.

**Замечание.** Приведём альтернативное красивое доказательство чётности числа расселений математиков, использующее линейную алгебру.

Занумеруем математиков числами от 1 до  $ab$ ; номера гостиницы на  $i$ -м этаже ( $i = 1, 2, \dots, a$ ) занумеруем числами от  $(i-1) \cdot b + 1$  до  $(i-1) \cdot b + b$ . Построим матрицу  $M$  размера  $ab \times ab$ , где

число  $M_{i,j}$  в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце определяется следующим образом:

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-му математику нравится } j\text{-й номер гостиницы;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Расселение математиков по номерам можно представить как перестановку  $\sigma \in S_{ab}$  (т. е. функцию  $\sigma: \{1, 2, \dots, ab\} \rightarrow \{1, 2, \dots, ab\}$ ), сопоставляющую номеру математика его номер в гостинице. Тогда количество подходящих расселений равно *перманенту* матрицы  $M$ :

$$\text{perm}(M) = \sum_{\sigma \in S_{ab}} \left( \prod_{i=1}^{ab} M_{i,\sigma(i)} \right).$$

Действительно, если данная перестановка  $\sigma$  подходит, то произведение чисел  $M_{i,\sigma(i)}$  будет равно 1, иначе 0.

Так как нас интересует только чётность данного выражения, то можно произвольным образом менять знаки перед слагаемыми. Заменяя знак перед каждым произведением на чётность перестановки  $\text{sgn}(\sigma) = \pm 1$ , получим *определитель* матрицы  $M$ :

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_{ab}} \left( \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{ab} M_{i,\sigma(i)} \right).$$

Теперь заметим, что сумма первых  $b$  столбцов матрицы (соответствующих первому этажу гостиницы) равна столбцу из единиц, так как каждому математику нравится ровно один номер на первом этаже гостиницы. Такая же сумма у следующих  $b$  столбцов матрицы. Следовательно, столбцы матрицы линейно зависимы, то есть она вырожденная; а так как определитель любой вырожденной матрицы равен нулю, то он чётен.

**Задача 5.** Максим загадал многочлен  $P(x)$  с вещественными коэффициентами. За один ход Надя может назвать любой многочлен  $Q(x)$  с вещественными коэффициентами, а в ответ Максим должен сообщить Наде следующие два факта:

- достигается ли максимальное значение  $P + Q$ , и если да, то чему оно равно;
- достигается ли минимальное значение  $P + Q$ , и если да, то чему оно равно.

Надя хочет последовательно сделать несколько таких ходов, а затем назвать такое вещественное число  $t$ , что  $|P(2026) - t| < 10^{-100}$ . Докажите, что Надя может действовать так, чтобы гарантированно добиться желаемого. (Надя сама решает, когда ей перестать задавать вопросы.) (*Л. Шатунов*)

*Решение.* Пусть Максим называет только многочлены имеющие корень 2026. Тогда если на каких-то ходах он назовёт многочлены  $V, W$  и Надя скажет, что минимум многочлена  $P + V$  равен  $x$ , а максимум многочлена  $P + W$  равен  $y$ , причём  $y - x < 10^{-100}$  (назовём такую ситуацию *приятной*), то Максим может назвать число  $t = x$ . Действительно, в такой ситуации

$$x \leq P(2026) + V(2026) = P(2026) = P(2026) + W(2026) \leq y,$$

откуда следует, что  $|P(2026) - x| = P(2026) - x \leq y - x < 10^{-100}$ . Осталось лишь показать, что Максим может последовательно сделать несколько ходов так, чтобы приятная ситуация гарантированно произошла. Приведём несколько способов этого добиться.

*Первый способ.* Разобьём стратегию Максима на два шага.

*Первый шаг.* Пусть Максим последовательно называет многочлены

$$(x - 2026)^2, -(x - 2026)^2, (x - 2026)^4, -(x - 2026)^4, \dots, (x - 2026)^{2n}, -(x - 2026)^{2n}, \dots$$

до тех пор, пока не услышит, последовательно назвав многочлены  $(x - 2026)^{2k}$  и  $-(x - 2026)^{2k}$  (для какого-то  $k \in \mathbb{N}$ ), что сумма  $P$  с первым из них достигает минимума, а сумма  $P$  со вторым из них достигает максимума.

Заметим, что когда-то такое обязательно произойдёт. Действительно, при  $k$ , превосходящем степень многочлена  $P$  (при  $k = 1$ , если  $P = 0$ ), оба многочлена  $P + (x - 2026)^{2k}$  и  $P - (x - 2026)^{2k}$  имеют чётную степень, и у первого из них старший коэффициент положителен, а у второго отрицателен, потому первый достигает минимума, а второй — максимума.

Итак, пусть Надя сказала, что  $P(x) + (x - 2026)^{2k}$  и  $P(x) - (x - 2026)^{2k}$  достигают минимума  $m$  и максимума  $M$  соответственно. Тогда  $P$  не может быть многочленом степени выше  $2k$ . Действительно, в противном случае многочлен  $P + (x - 2026)^{2k}$  имеет ту же степень и тот же старший коэффициент что и  $P$ , и значит эта степень чётна, а старший коэффициент положителен (так как  $P + (x - 2026)^{2k}$  достигает минимума), но, проводя аналогичное рассуждение для  $P - (x - 2026)^{2k}$ , получаем, что старший коэффициент  $P$  отрицателен — противоречие.

*Второй шаг.* Для  $n \geq k + 1$  положим  $Q_n(x) = (2n)^{2n+1}(x - 2026)^{2n}$ . Пусть теперь Максим последовательно называет многочлены

$$P_n^+(x) = (x - 2026)^{2k} + Q_n(x), \quad P_n^-(x) = -(x - 2026)^{2k} - Q_n(x) \quad \text{для } n = 1, 2, \dots$$

Докажем, что приятная ситуация произойдёт, каким бы ни был загаданный Надей многочлен.

В силу непрерывности многочленов  $P(x)$  и  $(x - 2026)^{2k}$  в точке  $x = 2026$  существует такое  $\varepsilon > 0$ , что для любого  $x \in \mathbb{R}$  из неравенства  $|x - 2026| < \varepsilon$  следует, что

$$|P(x) + (x - 2026)^{2k} - P(2026)| < \frac{10^{-100}}{2}, \quad |P(x) - (x - 2026)^{2k} - P(2026)| < \frac{10^{-100}}{2}. \quad (1)$$

Также заметим, что для любого такого  $x \in \mathbb{R}$ , что  $|x - 2026| \geq \frac{1}{2n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), имеем

$$Q_n(x) = (2n)^{2n+1}(x - 2026)^{2n} \geq (2n)^{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{2n}\right)^{2n} = 2n. \quad (2)$$

Пусть натуральное число  $N \in \mathbb{N}$  таково, что  $2N > P(2026) - m$  и  $\frac{1}{2N} < \varepsilon$ . Тогда заметим, что в силу оценок 1 и 2

$$|x - 2026| > \frac{1}{2N} \implies P(x) + P_N^+(x) = \underbrace{P(x) + (x - 2026)^{2k}}_{\geq m} + \underbrace{Q_N(x)}_{> 2N} > m + 2N > P(2026),$$

$$|x - 2026| \leq \frac{1}{2N} \implies P(x) + P_N^+(x) = \underbrace{P(x) + (x - 2026)^{2k}}_{> P(2026) - 10^{-100}/2} + \underbrace{Q_N(x)}_{\geq 0} > P(2026) - \frac{10^{-100}}{2},$$

откуда вытекает, что минимальное значение многочлена  $P(x) + P_N^+(x)$  существует и больше  $P(2026) - \frac{10^{-100}}{2}$ . Аналогично, если натуральное число  $N \in \mathbb{N}$  таково, что  $2N > M - P(2026)$  и  $\frac{1}{2N} < \varepsilon$ , то

$$|x - 2026| > \frac{1}{2N} \implies P(x) + P_N^-(x) = \underbrace{P(x) - (x - 2026)^{2k}}_{\leq M} - \underbrace{Q_N(x)}_{> 2N} < M - 2N < P(2026),$$

$$|x - 2026| \leq \frac{1}{2N} \implies P(x) + P_N^-(x) = \underbrace{P(x) - (x - 2026)^{2k}}_{< P(2026) + 10^{-100}/2} - \underbrace{Q_N(x)}_{\geq 0} < P(2026) + \frac{10^{-100}}{2},$$

и максимальное значение многочлена  $P(x) + P_N^-(x)$  существует и не превосходит  $P(2026) + \frac{10^{-100}}{2}$ . Таким образом, для  $N \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющего условиям  $2N > \max\{P(2026) - m, M - P(2026)\}$  и  $\frac{1}{2N} < \varepsilon$ , получаем, что минимальное значение многочлена  $P(x) + P_N^+(x)$  отличается от максимального

значения  $P(x) + P_N^-(x)$  меньше чем на  $10^{-100}$ , то есть после соответствующего хода или ещё раньше возникает приятная ситуация, что и требовалось доказать.

*Второй способ.*

*Лемма.* Пусть многочлен  $R(x)$  (с вещественными коэффициентами) имеет чётную степень  $2k > 1$  и таков, что модуль каждого из его коэффициентов при нечётных степенях не превосходит положительного вещественного числа  $C$ , а каждый из коэффициентов при чётных степенях от 0 до  $2k$  включительно не меньше, чем  $C$ . Тогда  $R(a) > 0$  для всякого вещественного  $a$ .

*Доказательство.* Зафиксируем произвольное  $a \in \mathbb{R}$ . Чётная степень всякого вещественного числа неотрицательна, тогда из условий на коэффициенты многочлена  $R(x)$  понятно, что  $R(a) \geq C(a^{2k} + a^{2k-2} + \dots + 1) - C(|a|^{2k-1} + |a|^{2k-3} + \dots + |a|)$ , откуда  $R(a) \geq C(|a|^{2k} - |a|^{2k-1} + |a|^{2k-2} \dots + 1) = C \frac{|a|^{2k+1} + 1}{|a| + 1} > 0$ , тем самым в силу произвольности выбора  $a \in \mathbb{R}$  лемма доказана.  $\square$

Перейдём к решению задачи. Для всякого натурального  $n$  положим  $Q_n(x) = n \cdot \sum_{j=1}^n (x - 2026)^{2j}$ .

Например,

$$Q_4(x) = 4(x - 2026)^8 + 4(x - 2026)^6 + 4(x - 2026)^4 + 4(x - 2026)^2).$$

Пусть Максим последовательно называет многочлены:

$$Q_1(x), -Q_1(x), Q_2(x), -Q_2(x), Q_3(x), -Q_3(x), \dots$$

Докажем, что приятная ситуация произойдёт, каким бы ни был загаданный Надей многочлен.

Пусть загаданный многочлен это  $P(x) = \sum_{j=0}^{2k} a_j(x-2026)^j$ , где  $k > 100$  — натуральное, а  $a_0, a_1, \dots, a_{2k}$  — некоторые вещественные числа (любой многочлен представляется в таком виде, возможно, некоторые коэффициенты  $a_j$  равны 0). Пусть модуль каждого из чисел  $a_0, a_1, \dots, a_{2k}$  не превосходит некоторого натурального числа  $M$ . Положим

$$N = k + 2M + 10^{100} \cdot M^2, \quad A(x) = a_0 + a_1x + 10^{100}M^2x^2, \quad B(x) = \sum_{j=2}^{2k} a_jx^{j-2} + (N - 10^{100} \cdot M^2) + N \cdot \sum_{j=2}^N x^{2j-2}.$$

Заметим, что  $B(x)$  удовлетворяет условиям доказанной леммы (например, для  $C = M$ ). Тогда для всякого  $a \in \mathbb{R}$  выполнено  $B(a) \geq 0$ , и, кроме того,

$$A(a) \geq A\left(-\frac{a_1}{2 \cdot 10^{100}M^2}\right) = a_0 - \frac{a_1^2}{4 \cdot 10^{100}M^2} \geq a_0 - \frac{1}{4 \cdot 10^{100}}.$$

Далее пусть  $D(x) = P(x + 2026) + Q_N(x + 2026)$ . Тогда

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{j=0}^{2k} a_jx^j + N \cdot \sum_{j=1}^N x^{2j} = \\ &= a_0 + a_1x + x^2 \left( \sum_{j=2}^{2k} a_jx^{j-2} + (N - 10^{100}M^2) \right) + N \cdot \sum_{j=2}^N x^{2j-2} + 10^{100}M^2x^2 = \\ &= A(x) + x^2B(x), \end{aligned}$$

а значит, в силу ранее доказанного получаем, что для всякого  $a \in \mathbb{R}$  выполнено

$$D(a - 2026) = A(a - 2026) + (a - 2026)^2B(a - 2026) \geq A(a - 2026) \geq a_0 - \frac{1}{4 \cdot 10^{100}}.$$

Значит,

$$P(a) + Q_N(a) = D(a - 2026) \geq a_0 - \frac{1}{4 \cdot 10^{100}} = P(2026) - \frac{1}{4 \cdot 10^{100}}.$$

Это означает, что многочлен  $P + Q_N$  достигает минимума (поскольку это ограниченный снизу многочлен), и этот минимум не меньше, чем  $P(2026) - \frac{1}{4 \cdot 10^{100}}$ . Аналогично (поменяв в рассуждении  $P$  на  $-P$ ) получаем, что  $-P + Q_N$  достигает минимума, и этот минимум не меньше, чем  $-P(2026) - \frac{1}{4 \cdot 10^{100}}$ , а значит  $P - Q_N$  достигает максимума, и этот максимум не больше, чем  $P(2026) - \frac{1}{4 \cdot 10^{100}}$ . Итак, разность максимума  $P - Q_N$  и минимума  $P + Q_N$  меньше, чем  $10^{-100}$ , значит приятная ситуация гарантированно произойдёт на каком-то из ходов до  $(2N)$ -го включительно.

**Задача 6.** В основании выпуклой четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит четырёхугольник  $ABCD$ , диагонали которого перпендикулярны, а никакие две стороны не равны. Известно, что вписанные сферы тетраэдров  $SABC$  и  $SACD$  касаются. Докажите, что вписанные сферы тетраэдров  $SABD$  и  $SBCD$  касаются. (А. Доледенюк)

*Решение. Первый способ.* Для решения нам понадобятся три известных леммы.

*Лемма 1.1.* Пусть сфера вписана в трёхгранный угол  $SABC$  и касается грани  $SBC$  в точке  $X$ . Тогда

$$\angle CSX = \frac{\angle ASC + \angle BSC - \angle ASB}{2}.$$

*Доказательство.* Пусть сфера касается граней  $SAC$  и  $SAB$  в точках  $Y$  и  $Z$  соответственно. Тогда  $SX = SY = SZ$ , а также  $AY = AZ$ ,  $BX = BZ$ ,  $CX = CY$  по теореме об отрезках касательных. Значит, по трём сторонам равны следующие пары треугольников  $CSX = CYS$ ,  $BXS = BZS$ ,  $AYS = AZS$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\angle ASC + \angle BSC - \angle ASB}{2} &= \frac{\angle ASY + \angle CSY + \angle CSX + \angle BSX - \angle BSZ - \angle ASZ}{2} = \\ &= \frac{(\angle CSX + \angle CSY) + (\angle ASY - \angle ASZ) + (\angle BSX - \angle BSZ)}{2} = \angle CSX, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

*Лемма 1.2.* В выпуклую четырёхугольную пирамиду  $SABCD$  можно вписать сферу тогда и только тогда, когда суммы противоположных плоских углов при вершине  $S$  равны.

Доказательство данного утверждения можно найти в заметке «О шаре, вписанном в выпуклую четырёхугольную пирамиду» И. Я. Такатара в журнале «Математическое просвещение».

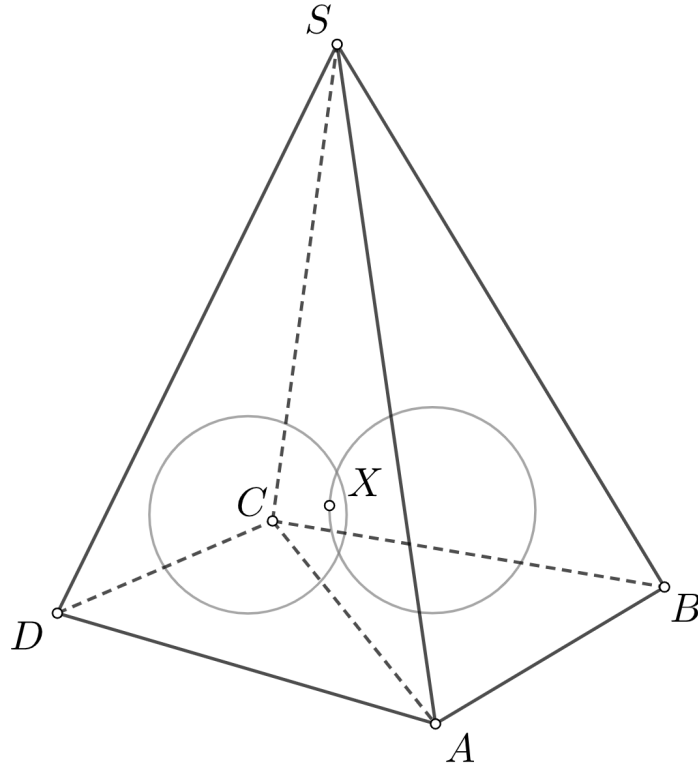
*Лемма 1.3.* В выпуклую четырёхугольную пирамиду  $SABCD$  вписана сфера, которая касается плоскости основания в точке  $T$ . Тогда  $\angle ATB + \angle CTD = 180^\circ$ .

*Доказательство.* Так как сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , получаем, что  $\angle ATB = 180^\circ - \angle TAB - \angle TBA$ ,  $\angle CTD = 180^\circ - \angle TCD - \angle TDC$ . Значит, достаточно обосновать равенство  $\angle TAB + \angle TBA + \angle TCD + \angle TDC = 180^\circ$ . По лемме 1.1

$$\begin{aligned} \angle TAB + \angle TBA + \angle TCD + \angle TDC &= \frac{\angle SAB + \angle BAD - \angle SAD}{2} + \frac{\angle SBA + \angle ABC - \angle SBC}{2} + \\ &+ \frac{\angle BCD + \angle SCD - \angle SCB}{2} + \frac{\angle ADC + \angle SDC - \angle SDA}{2} = \left( \frac{\angle BAD + \angle ABC + \angle BCD + \angle ADC}{2} \right) + \\ &+ \left( \frac{\angle SAB + \angle SBA + \angle SCD + \angle SDC}{2} \right) - \left( \frac{\angle SAD + \angle SDA + \angle SBC + \angle SCB}{2} \right) = \\ &= 180^\circ + 180^\circ - \left( \frac{\angle ASB + \angle CSD}{2} \right) - 180^\circ + \left( \frac{\angle BSC + \angle ASD}{2} \right) = 180^\circ, \end{aligned}$$

где последнее равенство выполнено по лемме 1.2.

Пусть вписанные сферы тетраэдров  $SABC$  и  $SACD$  касаются в точке  $X$ .



Запишем по лемме 1.1 величину угла  $CSX$  двумя способами.

$$\frac{\angle ASC + \angle CSD - \angle ASD}{2} = \frac{\angle ASC + \angle BSC - \angle ASB}{2} \iff \angle ASB + \angle CSD = \angle BSC + \angle ASD.$$

По лемме 1.2 полученное равенство эквивалентно тому, что в  $SABCD$  можно вписать сферу  $\omega$ .

Запишем по лемме 1.1 величину угла  $CAX$  двумя способами.

$$\begin{aligned} \frac{\angle SAC + \angle BAC - \angle SAB}{2} &= \frac{\angle SAC + \angle DAC - \angle SAD}{2} \iff \angle BAC - \angle DAC = \angle SAB - \angle SAD \iff \\ &\iff 2\angle BAC = \angle BAD + \angle SAB - \angle SAD \iff \angle BAC = \frac{\angle BAD + \angle SAB - \angle SAD}{2}. \end{aligned}$$

Из полученного равенства и леммы 1.1 следует, что точка  $T$  касания  $\omega$  с гранью  $ABCD$  лежит на диагонали  $AC$ . По лемме 1.3 сумма углов, под которыми из точки  $T$  видны стороны  $AB$  и  $CD$ , равна  $180^\circ$ . Несложно видеть, что поскольку диагонали четырёхугольника  $ABCD$  перпендикулярны и он отличен от дельтоида, то на диагонали существует ровно одна подходящая точка — это точка пересечения диагоналей. Таким образом, точка  $T$  лежит на диагонали  $BD$ .

Для решения задачи теперь необходимо проделать те же выкладки, но в обратном порядке.

- Сфера  $\omega$  вписана в трёхгранный угол  $BCAS$ , отсюда

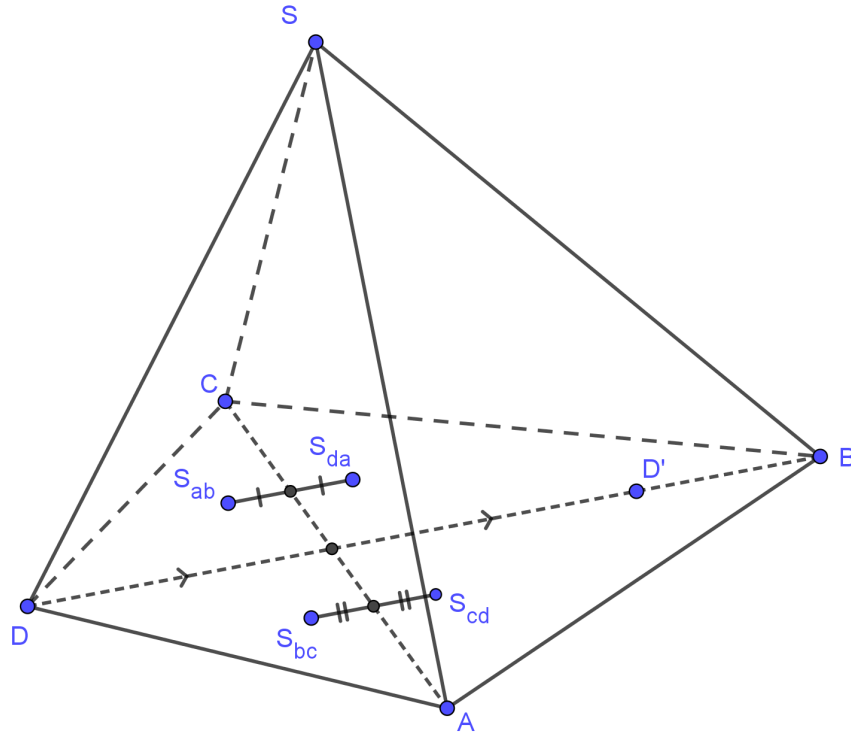
$$\angle ABT - \angle CBT = \angle ABD - \angle CBD = \angle ABS - \angle CBS.$$

- Обозначим точки касания вписанных в тетраэдры  $SABD$  и  $SBCD$  сфер с гранью  $SBD$  через  $Y$  и  $Z$  соответственно. Тогда, записав по лемме 1.1 углы  $DBY$  и  $DBZ$ , получим

$$\angle DBY = \angle DBZ \iff \angle ABD - \angle CBD = \angle ABS - \angle CBS,$$

что верно, откуда лучи  $BY$  и  $BZ$  совпадают. Аналогично доказывается, что лучи  $DY$  и  $DZ$  совпадают, откуда следует, что точки  $Y$  и  $Z$  совпадают, то есть сферы касаются.

Второй способ. Пусть точка  $S_{ab}$  на плоскости  $(ABCD)$  такова, что  $\triangle S_{ab}AB = \triangle SAB$ , а также  $S_{ab}$  лежит в той же полуплоскости относительно прямой  $AB$ , что и точки  $C$  и  $D$ . Аналогично построим точки  $S_{bc}, S_{cd}, S_{da}$ .



Как и первом решении, при помощи леммы 1.1 из касания вписанных сфер тетраэдров  $SABC$  и  $SACD$  получим равенства

$$\angle SAB - \angle BAC = \angle SAD - \angle CAD, \angle SCB - \angle BCA = \angle SCD - \angle DCA.$$

Отметим, что из неравенства треугольника для плоских углов трёхгранного угла следует, что обе данные величины положительны. Также заметим, что для решения задачи достаточно обосновать аналогичные равенства

$$\angle SBA - \angle DBA = \angle SBC - \angle CBD, \angle SDC - \angle CDB = \angle SDA - \angle BDA.$$

По построению  $S_{da}A = SA = S_{ab}A$ . В силу отмеченных выше равенств углов и их положительности

$$\angle S_{da}AC = \angle S_{da}AD - \angle CAD = \angle SAD - \angle CAD = \angle SAB - \angle CAB = \angle S_{ab}AB - \angle CAB = \angle S_{ab}AC.$$

Значит, точки  $S_{ab}$  и  $S_{da}$  симметричны относительно прямой  $AC$ . Аналогично получаем, что  $S_{bc}$  и  $S_{cd}$  симметричны относительно прямой  $AC$ .

Пусть точка  $D'$  симметрична  $D$  относительно  $A$ . Поскольку по условию у  $ABCD$  нет равных сторон, точка  $D'$  отлична от  $B$ . Тогда из симметрии получаем, что

$$D'S_{bc} = DS_{cd} = DS = DS_{da} = D'S_{ab}.$$

Поскольку  $S_{ab}B = SB = S_{bc}B$ , отсюда вытекает, что треугольники  $BD'S_{ab}$  и  $BD'S_{bc}$  (возможно, вырожденные) равны по трём сторонам.

Получаем, что точки  $S_{ab}$  и  $S_{bc}$  симметричны относительно прямой  $BD$  (или совпадают). Значит,  $\angle S_{bc}BD = \angle S_{ab}BD$ , откуда, аналогично рассуждению выше, следует равенство  $\angle SDA - \angle BDA = \angle SDC - \angle CDB$ . Второе искомое равенство углов доказывается аналогично.

Третий способ.

*Лемма 2.1.* Сфера  $\omega$  касается двух плоскостей, проходящих через точки  $C$  и  $D$ , в точках  $X$  и  $Y$ . Тогда треугольники  $CDX$  и  $CDY$  совмещаются поворотом относительно прямой  $CD$ , который переводит плоскость  $(CDX)$  в плоскость  $(CDY)$ .

*Доказательство.* Данное утверждение вытекает из доказательства леммы 1.1.

*Лемма 2.2.* Дана четырёхугольная пирамида  $SABCD$ . Сферы  $\omega_a$  и  $\omega_b$ , вписанные в тетраэдры  $SBCD$  и  $SABC$  соответственно, касаются грани  $SBC$  в точках  $X_1$  и  $Y_1$ , а грани  $ABCD$  в точках  $X_2$  и  $Y_2$  соответственно. Тогда  $X_1Y_1 = X_2Y_2$ .

*Доказательство.* Из леммы 2.1 следует, что при повороте относительно прямой  $BC$ , который переводит плоскость  $(SCD)$  в плоскость  $(ABCD)$ , точка  $X_1$  переходит в  $X_2$ , а точка  $Y_1$  — в  $Y_2$ , откуда вытекает искомое утверждение.

Обозначим вписанные сферы тетраэдров  $SABC, SBCD, SCDA, SDAB$  через  $\omega_d, \omega_a, \omega_b, \omega_c$  соответственно, их центры —  $I_d, I_a, I_b, I_c$  соответственно, а их точки касания с плоскостью  $(ABCD)$  —  $X_d, X_a, X_b, X_c$  соответственно. Пусть, как и в первом решении, сферы  $\omega_d$  и  $\omega_b$  касаются в точке  $X$ . По теореме об отрезках касательных имеют место равенства отрезков  $CX_b = CX = CX_d$ ,  $AX_b = AX = AX_d$ . Значит, точки  $X_b$  и  $X_d$  симметричны относительно прямой  $AC$ .

Обозначим точки касания  $\omega_a$  с плоскостями  $(SCD)$  и  $(SBC)$  через  $K_2$  и  $K_3$ , точку касания  $\omega_b$  с  $(SCD)$  — через  $K_1$ , а точку касания  $\omega_d$  с  $(SBC)$  — через  $K_4$ . По лемме 2.1 имеют место равенства треугольников:  $SCK_1 = SCX = SCK_4$  и  $SK_2C = SK_3C$ . Поскольку пары треугольников  $SK_1C, SK_4C$  и  $SK_2C, SK_3C$  совмещаются поворотом вокруг прямой  $CD$ , при котором плоскость  $(SCD)$  переходит в плоскость  $(SBC)$ , то  $K_1K_2 = K_3K_4$ . Из леммы 2.2 получаем также равенства  $X_aX_b = K_1K_2$  и  $X_dX_a = K_3K_4$ . Собирая указанные равенства вместе, получаем  $X_aX_b = X_aX_d$ . Проведя аналогичное рассуждение для сфер  $\omega_c, \omega_b$  и  $\omega_d$ , покажем, что  $X_cX_d = X_cX_b$ . Отсюда следует, что точки  $X_a$  и  $X_c$  лежат на серединном перпендикуляре к отрезку  $X_bX_d$ , то есть, как показано выше, на прямой  $AC$ .

Рассмотрим плоскость  $\pi_{ac}$ , проходящую через  $AC$  и перпендикулярную плоскости основания пирамиды  $(ABCD)$ . Так как точки касания сфер  $\omega_a$  и  $\omega_c$  с  $(ABCD)$  — точки  $X_a$  и  $X_c$  — лежат на  $AC$ , то центры  $I_a$  и  $I_c$  лежат в  $\pi_{ac}$ . Это означает, что прямые  $AI_a$  и  $CI_c$  пересекаются в некоторой точке, которую мы обозначим  $I$  (обе точки  $I_a$  и  $I_c$  лежат в части плоскости  $\pi_{ac}$ , ограниченной прямыми, перпендикулярными плоскости  $(ABCD)$ , проходящими через  $A$  и  $C$ , поэтому точка  $I$  действительно существует). Поскольку точки прямой  $AI_a$  равноудалены от плоскостей  $(SAD)$ ,  $(SAB)$  и  $(ABCD)$ , а точки прямой  $CI_c$  равноудалены от плоскостей  $(SCD)$ ,  $(SBC)$  и  $(ABCD)$ , то  $I$  равноудалена от плоскостей всех граней пирамиды  $SABCD$  и лежит внутри неё. Значит, в  $SABCD$  можно вписать сферу, причём  $I$  — центр этой вписанной сферы.

Докажем, что прямые  $I_dI_b$  и  $BD$  не параллельны.

*Доказательство.* Если  $I_dI_b \parallel BD$ , то  $I_dX_dX_bI_b$  — прямоугольник, в котором точка касания  $X$  сфер  $\omega_b$  и  $\omega_d$  является серединой отрезка  $I_bI_d$ . В таком случае  $S$  лежит в плоскости  $\pi'$ , проходящей через середину  $I_dI_b$  и перпендикулярной этому отрезку, а сферы  $\omega_b$  и  $\omega_d$  симметричны относительно  $\pi'$ . Тогда пары плоскостей граней  $(SCD)$ ,  $(SBD)$  и  $(SAD)$ ,  $(SAB)$  также симметричны относительно  $\pi'$ , откуда следует, в частности, что  $CD = CB$ ,  $AD = AB$ , что противоречит условию.

Так как  $I$  — центр вписанной сферы, то через эту точку также проходят лучи  $BI_b, DI_d$ . Отсюда следует, что точки  $(BDI_bI_d)$  лежат в одной плоскости. Поскольку ортогональная проекция прямой  $I_bI_d$  на плоскость  $(ABCD)$  — прямая  $X_1X_3$  — как показано выше, перпендикулярна прямой  $AC$ , то  $AC \perp I_bI_d$ . По условию задачи  $AC \perp BD$ . Так как прямые  $I_bI_d$  и  $BD$  не параллельны, получаем, что плоскость  $(I_dI_bBD)$  перпендикулярна  $AC$ . Отсюда следует, что точки касания  $X_b$  и  $X_d$  лежат на прямой  $BD$ .

Для завершения решения достаточно, как и в концовке первого способа, воспользовавшись леммой 1.1, обосновать равенства углов  $\angle X_cBD = \angle X_aBD$  и  $\angle X_cDB = \angle X_aDB$ .