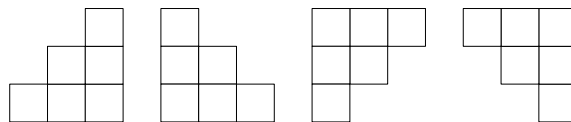


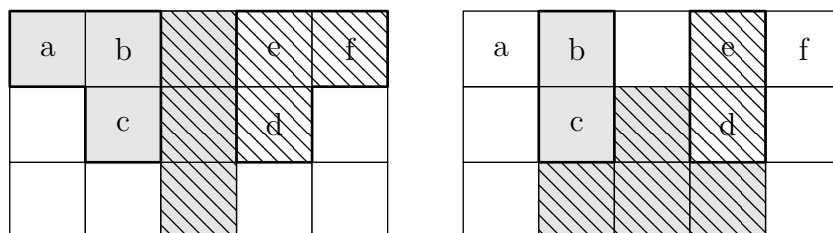
Задача 1. В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости записано по одному действительному числу так, что суммы чисел во всех группах клеток, образующих «лесенку» (см. рисунок), одинаковы. Может ли среди записанных чисел быть по крайней мере 89 различных?



(Жюри)

Ответ: нет.

Решение. Отметим четыре «лесенки» в прямоугольнике 3×5 , как показано на рисунке. Приравняв



суммы чисел в них, получим равенства

$$\begin{cases} a + b + c = d + e + f \\ b + c = d + e \end{cases},$$

откуда следует, что $a = f$. Таким образом, расстановка чисел на клетчатой плоскости периодична с шагом 4 по горизонтали. Проводя аналогичное рассуждение для прямоугольника 5×3 , получим, что она периодична с шагом четыре и по вертикали. Тогда на доске написано не больше $4 \cdot 4 = 16$ различных чисел.

Задача 2. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$a + \arctg b > c + \arctg d, \quad b + \arctg a > d + \arctg c.$$

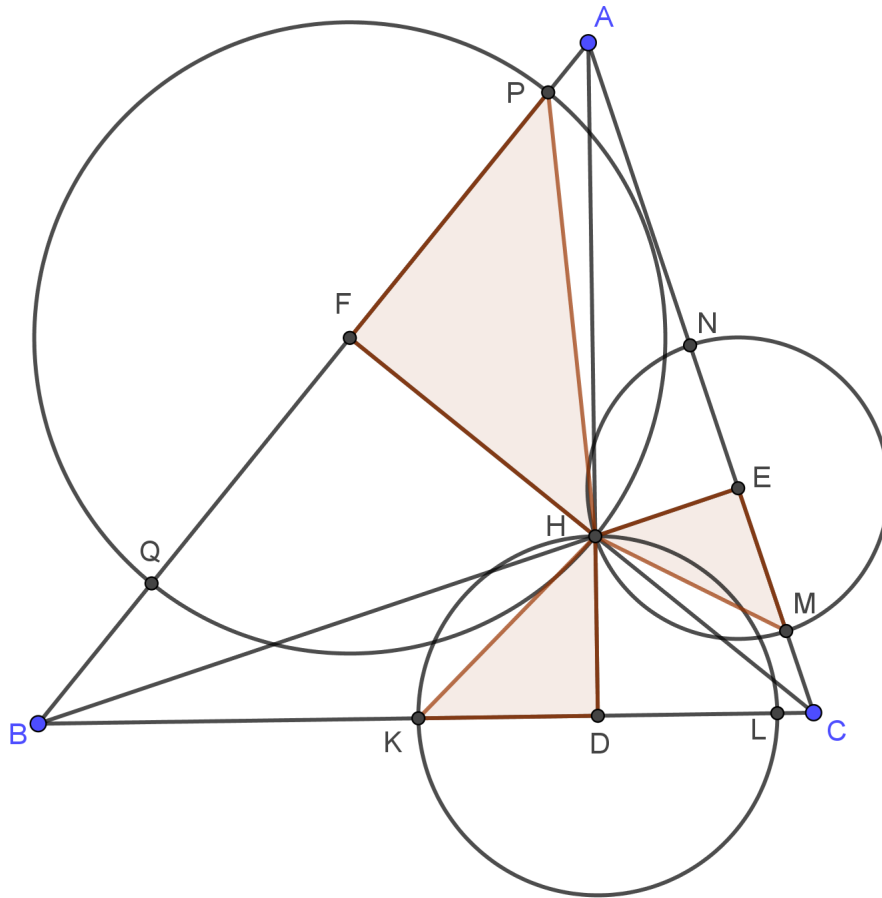
Докажите, что $a + b > c + d$.

(М. Гасанов)

Решение. Если $a \leq c$ и $b \leq d$, то $a + \arctg b \leq c + \arctg d$, что противоречит первому из неравенств в условии задачи. Следовательно, $a > c$ или $b > d$. Без ограничения общности можно считать, что $a > c$. Функция $f(x) = x - \arctg x$ строго возрастает, так как её производная $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ положительна при всех $x \neq 0$. Поэтому $f(a) > f(c)$, т. е. $a - \arctg a > c - \arctg c$. Складывая это неравенство со вторым неравенством из условия задачи, получаем $a + b > c + d$, что и требовалось доказать.

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE и CF пересекаются в точке H . Три окружности с центрами в точках D, E, F , проходящие через H , пересекают прямые BC, CA и AB соответственно в шести различных точках. Докажите, что эти шесть точек можно разбить на две тройки так, чтобы для двух треугольников, образованных этими тройками точек, нашлась окружность, касающаяся всех шести прямых, содержащих стороны этих треугольников. (И. Михайлов)

Решение. Обозначим точки пересечения трёх окружностей с центрами в точках D, E, F , проходящих через H , с прямыми BC, CA и AB соответственно, как показано на рисунке. Поскольку



треугольники HKD , HME , HPF — прямоугольные и равнобедренные, выполнены равенства

$$\frac{HK}{HD} = \frac{HM}{HE} = \frac{HP}{HF} = \sqrt{2}.$$

Тогда заметим, что при композиции поворота вокруг точки H на угол 45° против часовой стрелки и гомотетии с центром в H и коэффициентом $\sqrt{2}$ треугольник DEF переходит в треугольник KMP . Поскольку H — центр окружности, вписанной в треугольник DEF (обозначим её радиус r), получаем, что H — центр окружности, вписанной в треугольник KMP , радиус которой равен $r\sqrt{2}$. Проводя аналогичное рассуждение для равнобедренных прямоугольных треугольников HDL , HEN и HFQ , получаем, что окружность с центром в H радиуса $r\sqrt{2}$ вписана в треугольник LNQ . Таким образом, у треугольников KMP и LNQ — общая вписанная окружность, что и требовалось доказать.

Задача 4. В классе, состоящем из не менее 5 учеников (девочек и мальчиков), провели контрольную работу. Известно, что во время работы каждая пара школьников пообщалась и ровно один из учеников в этой паре помог другому. В результате оказалось, что для каждого ученика среди тех, кому он помог, поровну девочек и мальчиков. Сколько учеников могло быть в классе? (М. Гасанов, М. Кошелев)

Ответ: k^2 для любого натурального числа $k \geq 3$.

Решение. Сначала докажем, что n должно быть полным квадратом. Действительно, обозначим количество мальчиков за m , а количество девочек за f . Просуммируем по всем людям количество человек того же пола, которым они помогли. Эта сумма будет равна $\binom{m}{2} + \binom{f}{2}$, поскольку каждая

пара людей одного пола добавляет единицу к указанной сумме. С другой стороны, эта сумма совпадает с суммой по всем людям количества человек противоположного пола, которым они помогли. В свою очередь, последняя сумма равна mf . Таким образом, получаем, что

$$\binom{m}{2} + \binom{f}{2} = mf,$$

откуда

$$(m - f)^2 = m^2 - 2mf + f^2 = m + f = n.$$

Итак, мы знаем, что $n = k^2$. Более того, из рассуждений выше следует, что $m - f = \pm k$, откуда $\{m, f\} = \left\{ \binom{k}{2}, \binom{k+1}{2} \right\}$. Теперь осталось построить пример для таких параметров. Это можно сделать несколькими способами.

Первый способ. Докажем по индукции, что для всякого $k \geq 3$ существует конструкция с $(k^2 - k)/2$ мальчиками и $(k^2 + k)/2$ девочками.

База: для $k = 3$ пример строится непосредственно (например, можно взять конструкцию из Случая 2 следующего решения).

Переход: возьмём конструкцию A из предположения индукции, добавим n мальчиков и $n+1$ девочку, причём одну девочку выделим (пусть её зовут Таня).

Пусть все дети из конструкции A помогают в точности всем добавленным, кроме Тани (то есть они помогли n девочкам и n мальчикам);

Также пусть Таня помогает всем детям из конструкции A , а также добавленным мальчикам, и ни одной добавленной девочке (таким образом, она помогла по $(n^2 + n)/2$ мальчикам и девочкам).

Наконец, занумеруем добавленных детей каждого пола (мальчиков и всех девочек, кроме Тани, по-отдельности) числами от 1 до n . Внутри одного пола дети с большими номерами помогают детям с меньшим номером. Кроме того, девочки помогают мальчикам тогда и только тогда, когда их номер не меньше, чем номер мальчика. Итого, k -ая добавленная девочка помогла k девочкам (считая Таню) и k мальчикам, а k -ый новый мальчик помог $(k-1)$ -й девочке и такому же количеству мальчиков.

Второй способ. Построим три вспомогательные конструкции.

Конструкция 1. Рассмотрим полный ориентированный граф на $2s+1$ вершине, в котором вершины пронумерованы числами $0, \dots, 2s$, причём из вершины v выходят ребра с концами $v+1, \dots, v+s$ (все числа рассматриваем по модулю $2s+1$). Это задает s -регулярный турнир на $2s+1$ вершине. Назовем такую конструкцию $\text{Reg}(2s+1)$.

Конструкция 2. Рассмотрим полный ориентированный граф на $2s$ вершинах, в котором вершины пронумерованы числами $0, \dots, 2s-1$, причём из вершины v выходят ребра с концами $v+1, \dots, v+s-1$ (все числа рассматриваем по модулю $2s$). Кроме того, из вершин v с номерами $0, \dots, s-1$ выходит ребро в вершину $v+s$. Получаем граф, в котором исходящие степени вершин с номерами $0, \dots, s-1$ равны s , а исходящие степени вершин с номерами $s, \dots, 2s-1$ равны $s-1$. Такую конструкцию назовем $\text{Cir}(2s)$.

Конструкция 3. Зафиксируем натуральные числа l и r и рассмотрим целые неотрицательные числа a и b с условиями $al = br$, $a \leq r$, $b \leq l$. Пусть, кроме того, $g_l = l/\text{НОД}(l, r)$, $g_r = r/\text{НОД}(l, r)$. Заметим, что из условия немедленно следуют соотношения

$$g_r \mid a, \quad \frac{a}{g_r} \leq \frac{r}{g_r}, \quad b = \frac{la}{r} = \frac{g_l a}{g_r}.$$

Построим сначала двудольный граф, размеры левой и правой долей которого равны $t = \text{НОД}(l, r)$. Вершины каждой доли будем нумеровать числами от 0 до $t-1$. Для каждого $x \in \{0, \dots, t-1\}$ добавим в граф ребра $(x, x+i)$, $i \in \{0, \dots, a/g_r - 1\}$. Получили (a/g_r) -регулярный двудольный граф. Теперь каждую вершину левой доли превратим в g_l вершин, а каждую вершину правой доли — в g_r

вершин. Таким образом, получили граф, левая доля которого имеет размер l , правая — r , степень каждой вершины левой доли равна a , степень каждой вершины правой доли равна b . Наконец, ориентируем все проведенные ребра так, чтобы они шли из левой доли в правую, а между каждой парой несмежных вершин добавим ребро из правой доли в левую. Полученный граф назовем графом $\text{Part}(l, r, a, b)$.

Итак, теперь мы готовы строить примеры. Для этого разберем 4 случая:

Случай 1. Пусть $l = \binom{k}{2}$ и $r = \binom{k+1}{2}$ оба нечетные. Заметим, что выполняются соотношения $r \geq (l-1)/2, l \geq l - (r-1)/2$, а также равенство (проверяется непосредственно)

$$\frac{l(l-1)}{2} = r \left(l - \frac{r-1}{2} \right).$$

Тогда построим на множестве мальчиков граф $\text{Reg}(l)$, на множестве девочек граф $\text{Reg}(r)$, а между ними — граф $\text{Part}(l, r, (l-1)/2, l - (r-1)/2)$. Теперь для каждого ребра (x, y) будем считать, что x помог y . Тогда каждый мальчик помог $(l-1)/2$ мальчикам и девочкам, а каждая девочка помогла $(r-1)/2$ мальчику и девочке.

Случай 2. Пусть $l = \binom{k}{2}$ нечетно, а $r = \binom{k+1}{2}$ четно. Выделим одну из девочек (пусть её зовут Таня). Скажем, что Тане помогли как все мальчики, так и все остальные девочки. Для оставшихся людей повторим конструкцию из Случая 1: построим на множестве мальчиков граф $\text{Reg}(l)$, на множестве девочек граф $\text{Reg}(r-1)$, а между ними — граф $\text{Part}(l, r-1, (l-1)/2-1, l-r/2)$ (условия существования такого графа снова проверяются непосредственно).

Случай 3. Пусть $l = \binom{k}{2}$ четно, а $r = \binom{k+1}{2}$ нечетно. Выделим одного из мальчиков (пусть его зовут Петя). Скажем, что Пете помогли как все остальные мальчики, так и все девочки. Для оставшихся людей повторим конструкцию из Случая 1: построим на множестве мальчиков граф $\text{Reg}(l-1)$, на множестве девочек граф $\text{Reg}(r)$, а между ними — граф $\text{Part}(l-1, r, l/2, l - (r-1)/2)$ (условия существования такого графа снова проверяются непосредственно).

Случай 4. Пусть $l = \binom{k}{2}$ и $r = \binom{k+1}{2}$ оба четны (отсюда сразу же следует четность k). Построим на множестве мальчиков граф $\text{Circ}(l)$, на множестве девочек граф $\text{Circ}(r)$. Теперь пусть F_1, F_2 — половины девочек со степенями $r/2$ и $r/2 - 1$ соответственно. Построим всех девочек по кругу (причем под номерами $0, \dots, r/2-1$ будут стоять девочки из F_1), а мальчиков выстроим в ряд. После этого i -й мальчик поможет девочкам с номерами $S_i + 1, \dots, S_i + d_i$ (по модулю r), где d_i есть степень i -ого мальчика, а $S_i = d_1 + \dots + d_{i-1}$. Нетрудно видеть, что некоторому префиксу девочек (более точно, первым $\binom{l}{2} = S_{l+1} \bmod r$ девочкам) поможет $\lceil S_{l+1}/r \rceil$ мальчиков, а остальным — $\lfloor S_{l+1}/r \rfloor$ мальчиков. Осталось проверить соотношения $S_{l+1} \bmod r = r/2, \lceil S_{l+1}/r \rceil = r/2, \lfloor S_{l+1}/r \rfloor = r/2 - 1$, которые проверяются непосредственно.

Задача 5. Назовём натуральное $N > 1$ *хорошим*, если найдутся такие натуральные числа a_1, \dots, a_N , что наибольшие общие делители всевозможных пар из них образуют $N(N-1)/2$ последовательных натуральных чисел. Существует ли хорошее натуральное число, большее 10^{100} ? (А. Тертерян)

Решение. Предположим, что найдётся хорошее натуральное число $N > 10^{100}$. Тогда найдутся такие натуральные числа a_1, \dots, a_N , что наибольшие общие делители всевозможных пар из них образуют $N(N-1)/2$ последовательных натуральных чисел — обозначим их $b, b+1, \dots, b + \frac{N(N-1)}{2} - 1$.

Заметим, что для любого натурального числа k если среди чисел a_1, \dots, a_N ровно m чисел делятся на k , то среди их попарных НОД-ов ровно $\frac{m(m-1)}{2}$ делятся на k . Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ.

Заметим, что при $N > 4$ у числа $\frac{N(N-1)}{2}$ найдётся по крайней мере 2 различных простых делителя. В частности, у $\frac{N(N-1)}{2}$ найдётся простой делитель p , отличный от 3. Тогда среди чисел

$b, b+1, \dots, b + \frac{N(N-1)}{2} - 1$ ровно p делятся на $\frac{N(N-1)}{2p}$. Однако число вида $\frac{m(m-1)}{2}$ не может быть простым числом, отличным от 3, поскольку при $m \geq 4$ у него по крайней мере два различных простых делителя, а при $m = 1, 2, 3$ получаем значения 0, 1, 3. Противоречие.

Второй способ.

Поскольку попарные НОДы чисел a_1, \dots, a_N образуют $\frac{N(N-1)}{2}$ последовательных натуральных чисел, то количество c_k чисел среди них, делящихся на k , равно $\left[\frac{N(N-1)}{2k} \right]$ или $\left[\frac{N(N-1)}{2k} \right] + 1$.

Рассмотрим числа $c_N, c_{N+1}, \dots, c_{\frac{N(N-1)}{2}}$. Заметим, что для любого $l = N, \dots, \frac{N(N-1)}{2}$ числа c_l и c_{l+1} отличаются не больше чем на 3. Действительно, поскольку для каждого $j = 1, \dots, \frac{N(N-1)}{2}$ выполнены неравенства

$$\frac{N(N-1)}{2j} - 1 \leq \left[\frac{N(N-1)}{2j} \right] \leq c_j \leq \left[\frac{N(N-1)}{2j} \right] + 1 \leq \frac{N(N-1)}{2j} + 1,$$

имеет место оценка

$$|c_l - c_{l+1}| \leq \left| \frac{N(N-1)}{2l} - \frac{N(N-1)}{2(l+1)} \right| + 2 = \left| \frac{N(N-1)}{2l(l+1)} \right| + 2 \leq \frac{1}{2} + 2 < 3.$$

Рассмотрим такое минимальное натуральное $l \geq N$, что $c_l > c_{l+1}$. Поскольку $c_N \geq \frac{N(N-1)}{2} - 1 > 10^{100} + 2$, а $c_l = c_N$, получаем, что c_l и c_{l+1} — два числа, большие 10^{100} , отличающиеся не больше чем на 3. С другой стороны, как было отмечено выше, оба числа c_l и c_{l+1} имеют вид $m(m-1)/2$, где m — натуральное. Но при $m > 3$ соседние числа такого вида отличаются хотя бы на 4, поскольку

$$\frac{(m+1)m}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = m > 3.$$

Противоречие.