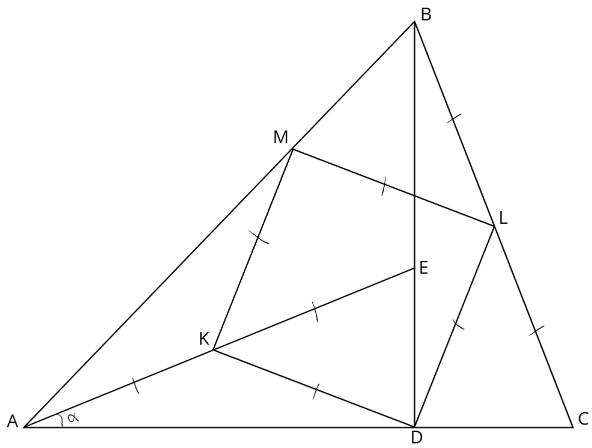
1. Алиса записала положительные числа a, b, c, d, e (не обязательно целые), а Маруся — числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{e}$. Оказалось, что сумма чисел Алисы больше суммы чисел Маруси. Могло ли произведение чисел Алисы оказаться меньше произведения чисел Маруси?

(Д.Мухин)

Решение. Да, могло. Пример таких чисел: $a = 15, b = c = d = e = \frac{1}{2}$.

2. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BD внутри треугольника выбрали точку E. K — середина отрезка AE, L — середина отрезка BC. Оказалось, что точки K, D, L — последовательные вершины квадрата. Докажите, что четвертая вершина квадрата лежит на прямой AB.

(Д. Мухин)



Решение. Обозначим четвертую вершину квадрата за M. Докажем, что угол AMB — развернутый, это завершит решение задачи. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине, поэтому $AK = KE = KD = KM = ML = DL = BL = LC$. Обозначим $\angle KAD = \alpha$. Тогда $\angle KDA = \alpha, \angle KDE = 90^\circ - \alpha, \angle EDL = \alpha, \angle DBL = \alpha, \angle BLD = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle BLM = 90^\circ - 2\alpha, \angle BML = 90^\circ - \frac{BLM}{2} = 45^\circ + \alpha, \angle AKD = 180^\circ - 2\alpha, \angle EKD = 2\alpha, \angle MKE = 90^\circ - 2\alpha, \angle AKM = 90^\circ + 2\alpha, \angle AMK = 90^\circ - \frac{AKM}{2} = 45^\circ - \alpha$. Поскольку $\angle AMK + \angle KML + \angle BML = 180^\circ$, $\angle AMB$ — развернутый, что и требовалось.

3. Полина записала число, оканчивающееся на 2026. А Стёпа посчитал сумму всех натуральных делителей этого числа (включая 1 и само число). Мог ли он получить число 1 000 000 001?

(И. Сиротовский)

Решение 1. Назовем данное число n. Последняя цифра n делится на 2, поэтому n делится на 2. Образованное последними двумя цифрами n число не делится на 4, поэтому n не делится на 4. Пусть $n = 2k$. Поскольку n делится на 2, но не на 4, k — нечетное натуральное число. Разобьем все делители n на пары: каждому нечетному делителю сопоставим делитель, вдвое больший его. Заметим, что если d — нечетный делитель n, то $2d$ — делитель n. Действительно, число $\frac{2k}{d} = m$ четное (иначе произведение нечетных чисел d и m четно), а значит, $\frac{2k}{2d} = \frac{m}{2}$ целое. Заметим, что если $2d$ — четный делитель n, то d нечетно. Действительно, если d было четно, то $2d \,\vdots\, 4$, а значит, и $n \,\vdots\, 4$ — противоречие. Таким образом, мы разбили все делители на такие пары. В каждой паре сумма чисел кратна 3: она равна утроенному нечетному делителю, тогда сумма всех делителей тоже кратна 3, но сумма цифр числа 1 000 000 001 не кратна 3, а значит, оно не кратно 3 — противоречие.

Решение 2. Аналогично решению 1 разобьём делители на пары d и $2d$, тогда сумма делителей в каждой паре нечётна. А раз и общая сумма делителей нечётна, то нечётно также и количество пар. Следовательно число $\frac{n}{2}$ имеет нечетное количество делителей и потому является точным квадратом. При этом поскольку n оканчивается на 26, оно равно $100k + 26$, где k целое. $\frac{n}{2}$ равно $50k + 13$, то есть оканивается на 3. Но точные квадраты не могут заканчиваться на цифру 3 — противоречие.

Комментарий. В решении 2 мы использовали следующий факт: у натурального числа количество натуральных делителей нечетно тогда и только тогда, когда оно — полный квадрат. Докажем это. Поставим в соответствие каждому делителю d числа n число $\frac{n}{d}$. Заметим, что оно также является делителем n. Есть два варианта: либо не найдется такого d, что $n = d^2$ — это означает, что n не является полным квадратом, тогда все делители n разбились на пары, то есть их количество четно. Либо найдется такое d, что $n = d^2$ — тогда n полный квадрат и все делители n, кроме данного d, разбились на пары, то есть их количество нечетно.

4. Король решил испытать своего придворного мудреца. Он выложил 144 внешне одинаковые золотые монеты в виде квадрата 12×12 и сообщил, что среди них ровно 12 фальшивых монет, которые лежат в ряд (по горизонтали или вертикали). Все настоящие монеты весят одинаково, а фальшивые могут весить по-разному, но каждая из них легче настоящей. Король просит найти 110 настоящих монет за два взвешивания на чашечных весах без гирь. Может ли мудрец действовать так, чтобы гарантированно справиться с заданием короля?

(М. Евдокимов)

Чашечные весы показывают, на какой из двух чаш груз тяжелее. Если грузы весят одинаково, весы показывают равенство. На каждую из чаш можно положить любое количество монет.

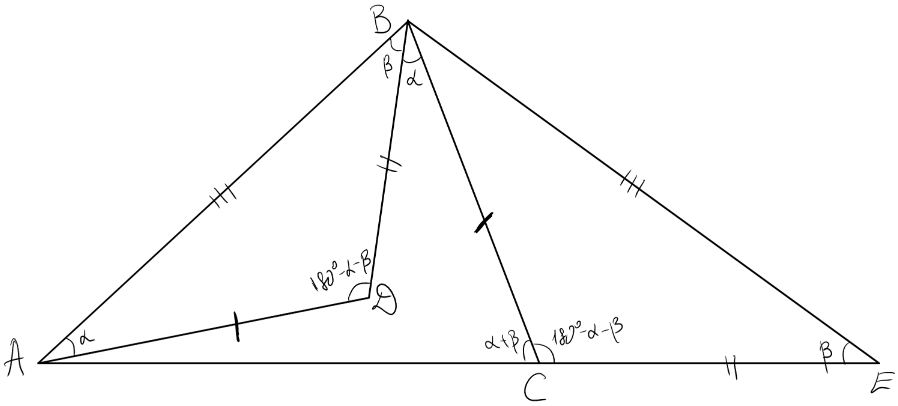
Решение. Рассмотрим главную диагональ квадрата. Заметим, что из этих монет ровно одна фальшивая. Первым взвешиванием сравним первую и вторую четверку монет на главной диагонали. Если какая-то из чаш легче, то фальшивая монета среди монет на этой чаше. Если же чаши равны, то фальшивая монета среди четырёх не участвоваших во взвешивании.

Без огранения общности будем считать, что фальшифая монета среди первых четырёх, тогда линией из фальшивых монет может оказаться один первых четырёх столбцов или одна из первых четырех строк. Вторым взвешиванием на левую чашу положим первую и вторую монету из первой строчки, а на правую — третью и четвёртую из второй строчки. Заметим, что фальшивые монеты могут быть только на одной чаше весов, поэтому, если легче левая чаша, то фальшивые монеты могут быть в первой строчке, или в первом столбце, или во втором столбце; если легче правая чаша — то во второй строчке, или в третьем столбце, или в четвертом столбце; если же чаши в рановесии, то фальшивые монеты в третьей или четвёртой строчке. В каждом из этих случаев все монеты, кроме расположенных в указаных линиях, гарантированно настоящие. В первых двух случаях их будет 110, в последнем — 120.

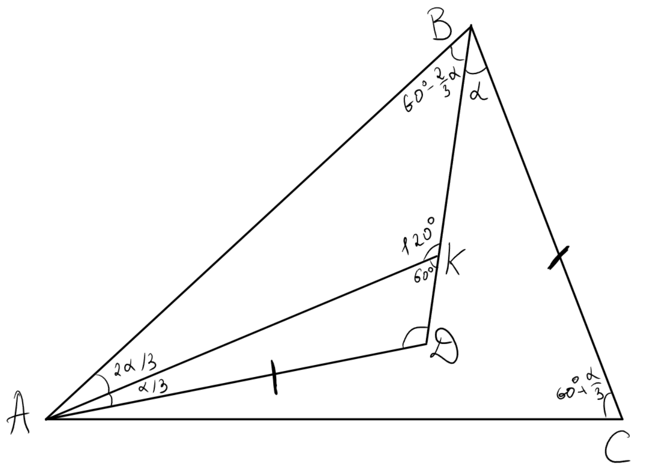
Комментарий. На самом деле 110 — максимальное количество монет, истинность которых мудрец может гарантированно установить. Докажем это. Всего есть 24 варианта линий, монеты на которых могут оказаться фальшивыми. Два взвешивания имеют девять различных исходов. На каждый исход мудрец называет одну или несколько линий, в которых (непротиворечиво с этим исходом) могут находиться фальшивые монеты (монеты, не входящие в эти линии, соответственно, гарантированно настоящие). Тогда по принципу Дирихле хотя бы на один исход мудрец назовёт хотя бы три линии. Если это три линии одного направления, то гарантированно настоящих монет будет $144 - 3 \cdot 12 = 108$, а если две одного и одна другого, то $144 - 3 \cdot 12 + 2 = 110$.

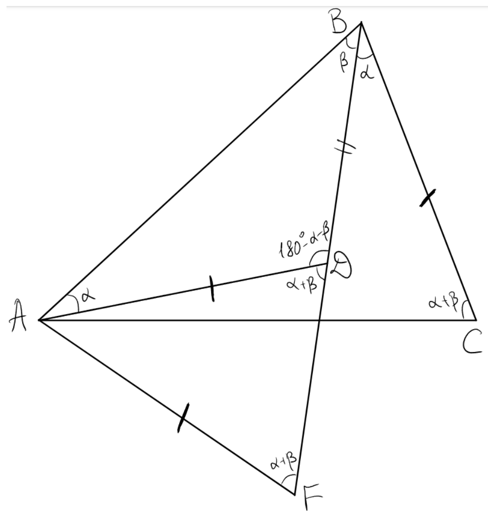
5. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) выбрана точка D так, что $AD = BC, \angle DAB = \angle DBC$. Точка K на отрезке BD такова, что $\angle AKD = 60°$. Точки K и B различны. Докажите, что $\angle BAK = 2\angle KAD$.

(М. Федотова)

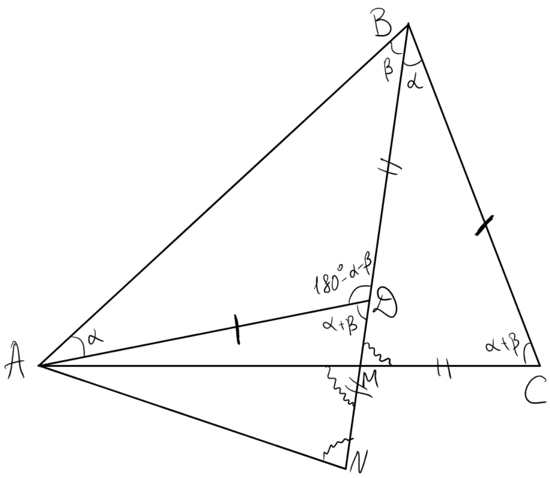


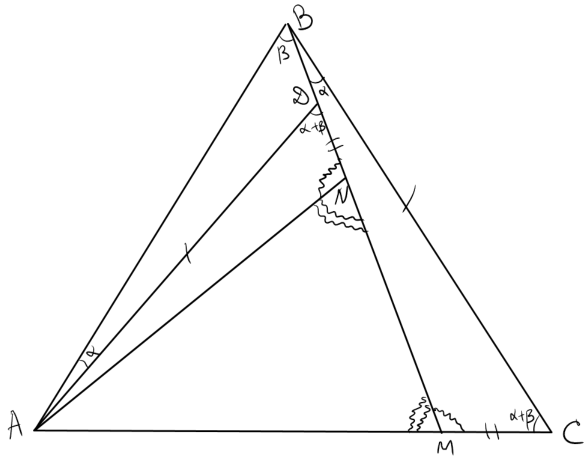
Решение 1. Обозначим $\angle DAB = \angle DBC = \alpha, \angle ABD = \beta$. Тогда из суммы углов $\triangle ABD$ $\angle ADB = 180° - \alpha - \beta$. Поскольку $AB = AC, \angle ACB = \angle ABC = \alpha + \beta$. Заметим, что сумма углов ADB и BCA равна $180°$. Теперь напрашивается дополнительное построение: переложить треугольник ADB так, чтобы сторона AD совпала с отрезком BC, а угол ADB совпал с углом, смежным углу BCA по прямой AC — получим треугольник BCE, E лежит на прямой AC. Соответственные углы в равных треугольниках равны: $\angle BEC = \angle ABD = \beta$. Соответственные стороны в равных треугольниках равны: $AB = BE$, значит, $\angle BAC = \angle BEA = \beta$. Из суммы углов $\triangle ABC : \beta + 2(\alpha + \beta) = 180°$, откуда $\beta = 60° - \frac{2}{3}\alpha$. Из теоремы о внешнем угле для $\triangle AKB$ и угла K: $\angle AKD = \angle KAB + \angle ABK$, то есть $\angle KAB = \angle AKD - \angle ABK = 60° - (60° - \frac{2}{3}\alpha) = \frac{2}{3}\alpha$. $\angle KAD = \angle BAD - \angle BAK = \alpha - \frac{2}{3}\alpha = \frac{1}{3}\alpha$, откуда получаем искомое отношение.



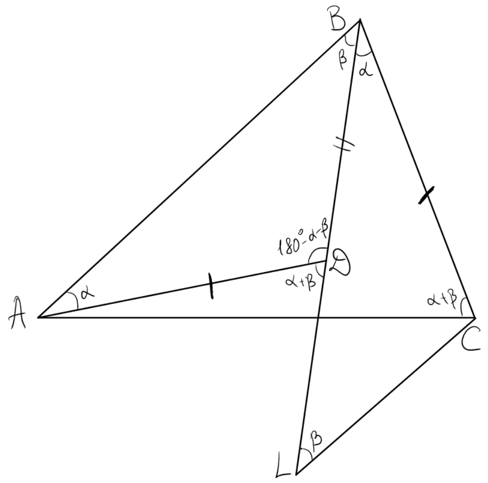


Решение 2. Заметив, как в первом решении, что углы BCA и ADB дают в сумме $180°$, поймем, что первый угол острый как угол при основании равнобедренного треугольника, а второй — тупой. Теперь отложим точку F на продолжении отрезка BD за точку D так, что $AD = AF$. Тогда $\angle AFD = \angle ADF = 180° - \angle ADB = \angle BCA$. В $\triangle ABD$ $\angle ADB$ тупой, и, поскольку напротив большего угла лежит бóльшая сторона, $AB > AD$, значит, $AB > AF$. Посмотрим на $\triangle AFB$ и $\triangle BCA$: в них равны две стороны и угол не между ними — AB — общая, $AF = BC, \angle AFB = \angle BCA$ и дополнительно $AB > AF$. Тогда они равны по четвертому признаку равенства треугольников, откуда $\angle ABF = \angle BAC$, далее действуем как в первом решении.



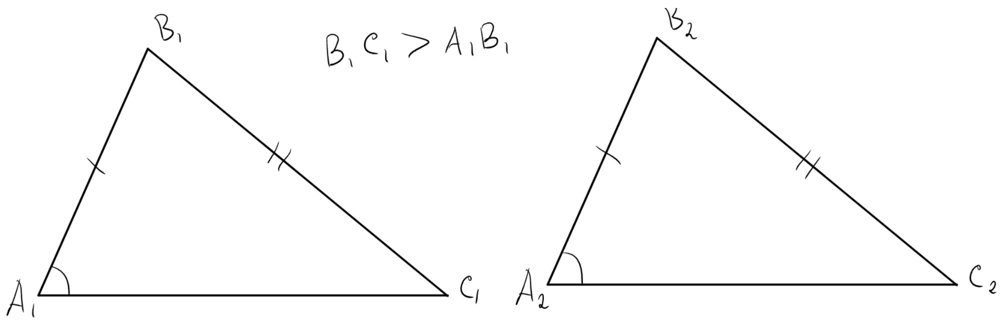


Решение 3. Пусть продолжение BD за точку D пересекает отрезок AC в точке M. Заметив, как в первом решении, что сумма углов ADB и BCA равна $180°$, можно прийти к другому дополнительному построению: переложить треугольник BCM так, чтобы сторона BC совпала с отрезком AD, а угол BCM совпал с углом ADM — получим треугольник ADN, N лежит на прямой BD. Соответственные углы в равных треугольниках равны: $\angle AND = \angle BMC$. Дальше решение немного зависит от расположения точек: если N лежит на продолжении отрезка DM за точку M, то $\angle AMN = \angle BMC$ как вертикальные, откуда $\angle AMN = \angle ANM$ и $AM = AN$. Если N лежит на отрезке DM, то $\angle AMN = 180° - \angle BMC$ — эти углы смежные и $\angle ANM = 180° - AND$ — они также смежные, откуда $\angle AMN = \angle ANM$ и $AM = AN$. Если N совпадает с M, сразу имеем $AM = AN$. Соответственные стороны в равных треугольниках равны: $AN = BM$, откуда $AM = BM$. Тогда $\angle BAM = \angle ABM$, далее действуем как в первом решении.



Решение 4. Отметим на луче BD такую точку L, что $BA = BL$. Тогда $\triangle ABD = \triangle BLC$ по двум сторонам ($AB = BL, AD = BC$) и углу между ними ($\angle BAD = \angle LBC$), откуда $\angle ABD = \angle BLC$ как соответственные. Отсюда $AB||LC$, то есть $ABCL$ — трапеция или параллелограмм. Кроме того, $AC = BL$, значит, $ABCL$ — равнобедренная трапеция или прямоугольник и $\angle BAC = \angle ABD$. Далее действуем как в первом решении.

Комментарий 1. Часто в геометрических задачах полезно отринуть часть условия: стереть некоторые точки, отрезки, чтобы было проще доказать какие-то факты про оставшуюся часть чертежа. В данной задаче мы видим, что в задаче говорится про величины углов $\angle BAD$ и $\angle DBC$ и длины отрезков AD и BC, что задает некое условие на взаимное положение точек A, B, C, D, при этом точка K однозначно задается единственным условием $\angle AKD = 60°$, поэтому хорошая идея — сначала стереть точку K и попытаться понять что-то про конструкцию из точек A, B, C, D, что мы и сделали во всех четырех решениях.



Комментарий 2. Четвертый признак равенства треугольников формулируется следующим образом: «Если у двух треугольников равны две стороны и угол напротив большей из этих сторон, то треугольники равны» (последнее условие можно заменить и на некоторые другие). Подробнее про четвертый признак равенства треугольников можно прочитать в следующих источниках: «Четвертый признак равенства треугольников», А. Егоров — «Квант», 2004, №5. «Четвертый признак равенства треугольников», А. Блинков. — «Квант», 2020, №1. «Геометрия для 7 класса, обычная и не очень», часть 1, А. Блинков. — МЦНМО, 2021.

Комментарий 3. Зачастую в задачах можно получить наводящие на решение соображения следующим способом: нужно отметить не только то, что дано, но и то, что надо доказать, и посмотреть, какие хорошие факты получаются из этого — это может натолкнуть на полезную мысль доказывать сначала эти хорошие факты, а не непосредственно утверждение задачи. Покажем, как применить это в данной задаче. Отметим и дано, и утверждение задачи на чертеже с обозначениями как в решении, а затем последовательно выразим углы $\angle AKB = 120°, \angle ABK = 60° - \frac{2}{3}\alpha, \angle BCA = 60° + \frac{1}{3}\alpha, \angle BAC = 60° - \frac{2}{3}\alpha$. Заметим, что $\angle BAC = \angle ABD$. Это обязательно верно, если только авторы не дали некорректную задачу. Данное наблюдение может помочь догадаться до одного из четырех приведенных выше дополнительных построений, например, теперь еще проще обнаружить, что после построения описанной выше точки F должны образоваться равные треугольники $\triangle AFB$ и $\triangle BCA$.

Комментарий 4. Еще один прием помогает в задачах, в которых ответ не дан, то есть в тех, где просят найти величину какого-то угла или отношение каких-то отрезков или углов. Зачастую, хоть и не всегда, значение такой величины получается единственным, поэтому можно попытаться угадать, чему оно равно, рассмотрев какой-то хороший частный случай: например, когда данный в условии треугольник является равносторонним, равнобедренным или прямоугольным (или близок к ним), а затем для получения подсказки отметить найденный ответ на чертеже для общего случая и действовать как в комментарии 3. Если бы в данной задаче спрашивали, каково отношение углов BAK и KAD, можно было бы попытаться действовать таким образом. Примечательный факт, что здесь этот прием использовать не получается: в случае, когда $\triangle ABC$ близок к равностороннему треугольнику, оба угла $\angle BAK$ и $\angle KAD$ становятся почти нулевыми, и понять, чему равно их отношение, не удается, а других «хороших» треугольников подобрать не получается.

Комментарий 5. Для всякого равнобедренного треугольника $ABC(AB = AC)$ с углом при вершине A от 36° до 60° (не включая этих значений) существует единственная такая конструкция, для всех остальных — не существует. Докажем это.

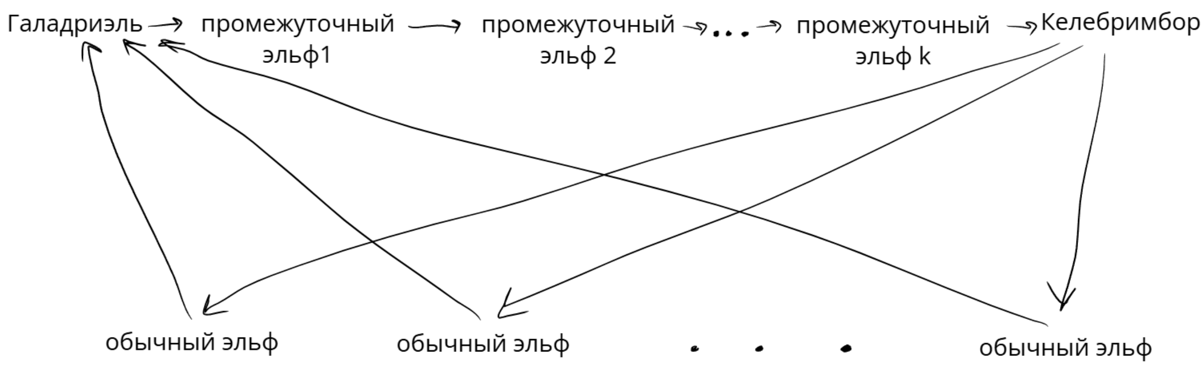
Пусть $\angle BAC \geqslant 60^\circ$. Тогда $\angle A$ — наибольший угол $\triangle ABC$, а поскольку напротив большего угла лежит бóльшая сторона, BC — бóльшая сторона. Лежащий внутри $\triangle ABC$ отрезок AD сторого меньше хотя бы одной из сторон AB, AC, поэтому $AD < AB \leqslant BC$ — противоречие, значит, $\angle BAC < 60^\circ$.

Из решения следует, что $60^\circ - \frac{2}{3}\alpha = \angle BAC > \angle BAD = \alpha$, откуда $\alpha < 36^\circ, \angle BAC = 60^\circ - \frac{2}{3}\alpha > 36^\circ$.

В решении мы уже доказали, что при заданной величине $\angle BAC$ конструкций из условия не больше одной: действительно, значение угла $\angle BAC$, равного $60^\circ - \frac{2}{3}\alpha$, однозначно задает величину угла α, и положение точки D, являющейся пересечением лучей AD и BD, идущих под заданными углами к AB, однозначно. Таким же образом доказывается существование конструкции при $36^\circ \leqslant \angle BAC \leqslant 60^\circ$. Пусть $\angle BAC = \beta$ Выберем точку D так, чтобы $\angle ABD = \beta, \angle DAB = 90^\circ - \frac{3}{2}\beta$. Это возможно, поскольку $\angle ABD = \angle BAC = 180^\circ - 2\angle ABC < \angle ABC$ при $\angle ABC > 60^\circ$, что равносильно $\angle BAC < 60^\circ$, а $\angle BAD = 90^\circ - \frac{3}{2}\angle BAC < \angle BAC$, что равносильно $\angle BAC > 36^\circ$. Построив точку F как в решении 2 и посчитав углы $\triangle ABF$, заметим, что они равны углам треугольника BAC, а сторона AB общая, откуда получаем равенство данных треугольников, откуда $BC = AF = AD$. Осталось лишь заметить, что $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta - \beta = \angle BAC$, то есть точка D действительно удовлетворяет всем нужным условиям. Заметим теперь, что $\angle ADB = 90^\circ + \frac{\beta}{2} < 120^\circ, \angle ABD = \beta < 60^\circ$, поэтому на отрезке BD найдется единственная точка K такая, что $\angle AKD = 60^\circ$.

6. В совет входит $n \geqslant 5$ эльфов, каждый из которых доверяет одному или нескольким другим эльфам (доверие необязательно взаимно). Они хотят, чтобы один из эльфов взял Кольцо Всевластья, а затем текущий владелец Кольца передавал его одному из тех, кому доверяет. Известно, что так от любого эльфа Кольцо может перейти (необязательно напрямую) к любому другому. Эльфы хотят действовать так, чтобы в результате k передач Кольца оно хотя бы раз побывало у каждого эльфа. При каком наименьшем k (для данного n) у них обязательно получится это сделать (вне зависимости от того, кто кому доверяет)?

(М. Федотова)



Решение. Ответ: $k = [\frac{n^2}{4}]$ ($[\frac{n^2}{4}]$ — целая часть выражения $\frac{n^2}{4}$). Оценка $k \geqslant [\frac{n^2}{4}]$. В оценке мы должны доказать, что гарантированно быстрее передать Кольцо не получится, для этого достаточно привести конкретный набор доверий, при котором осуществить желанное не удастся быстрее. Назовем двух из эльфов Келебримбором и Галадриэлью, r эльфов назовем промежуточными (далее мы укажем, какое надо взять r), а всех остальных эльфов назовем обычными, их будет $n - r - 2$. Пусть доверия устроены следующим образом: Келебримбор доверяет всем обычным эльфам, все обычные эльфы доверяют Галадриэль, Галадриэль доверяет первому промежуточному эльфу, каждый промежуточный эльф, кроме последнего доверяет следующему промежуточному эльфу, последний промежуточный эльф доверяет Келебримбору, других доверий нет. Легко видеть, что любой эльф (необязательно напрямую) может передать Кольцо любому другому. Заметим, что самый короткий путь от одного обычного эльфа до другого занимает $r + 3$ передач: от него Кольцо может попасть только Галадриэль, затем за $r + 1$ передач попадет Келебримбору (других вариантов передачи нет), и понадобится еще хотя бы одна передача, чтобы оно оказалось у нужного обычного эльфа. Так как Кольцо должно побывать у всех обычных эльфов, не существует искомого пути менее чем за $(n - r - 3)(r + 3)$ передач. Взяв $r + 3 = [\frac{n+1}{2}]$, получим оценку на $[\frac{n^2}{4}]$.

Пример для $k = [\frac{n^2}{4}]$. В примере мы должны доказать, что такое k действительно подходит, то есть что при любом наборе доверий за такое количество передач осуществить желанное удастся. Назовем мудрой цепочкой несколько последовательных передач, в результате которых ни у одного эльфа Кольцо не побывает дважды (в теории графов такую цепочку называют *простым путем*).

Лемма. Для всякой упорядоченной пары эльфов существует мудрая цепочка, позволяющая передать Кольцо от первого ко второму. По условию существует некоторая цепочка. Если она не является мудрой, выкинем ее участок между повторяющимся эльфом. Делая это, пока какой-то эльф повторяется, получим мудрую цепочку.

Рассмотрим все возможные мудрые цепочки, выберем среди них самую длинную и отправим Кольцо данным маршрутом. Затем по одному обойдем всех оставшихся $n - (m + 1)$ эльфов, не входящих в эту цепочку, каждый раз используя мудрую цепочку. Всего получится не более $m + m(n - m - 1) = m(n - m)$ передач. Максимум этого выражения при фиксированном натуральном n и натуральном m равен равен $[\frac{n^2}{4}]$.

Докажем теперь, что максимум выражения $x(n - x)$ при фиксированном вещественном n и вещественном x равен равен $\frac{n^2}{4}$ и достигается при $x = \frac{n}{2}$.

Способ 1. Выделим полный квадрат: $x(n - x) = \frac{n^2}{4} - (\frac{n}{2} - x)^2$. Поскольку квадрат всякого вещественного числа неотрицателен, последнее выражение не больше $\frac{n^2}{4}$ и равно ему в точности при $x = \frac{n}{2}$.

Способ 2. Данное выражение является *квадратным трехчленом* относительно x: $x(n-x) = (-1) \cdot x^2 + n \cdot x + 0$. Известно, что максимум квадратного трехчлена с отрицательным старшим коэффициентом достигается при $x = -\frac{n}{2\cdot(-1)} = \frac{n}{2}$. Подставив, получаем $\frac{n^2}{4}$.

Способ 3, только для натуральных n и целых неотрицательных x (но это в задаче и нужно). Посчитаем, как выражение $x(n-x)$ меняется при увеличении x на 1: $(x+1)(n-(x+1)) - x(n-x) = n-2x-1$. Это выражение больше нуля, если $x < \frac{n+1}{2}$, равно нулю, если $x = \frac{n+1}{2}$ и меньше нуля, если $x > \frac{n+1}{2}$. Идя от $x = 0$ до $x = n$ и увеличивая x на 1, получим, что выражение растет и достигается максимума при $x = \frac{n}{2}$ для четных n и при $x = \frac{n-1}{2}$ или $x = \frac{n+1}{2}$ для нечетных n.

Комментарий 1. Также можно было бы вместо выделения самой длинной возможной мудрой цепочки зафиксировать для всякой упорядоченной пары эльфов произвольную (например, самую короткую или самую длинную) мудрую цепочку, идущую от первого ко второму, и рассматривать не все мудрые цепочки, а только зафиксированные, решение от этого не меняется.

Комментарий 2. На одном из форумов по компьютерным наукам обсуждалась следующая задача. Рассматривается преобразование R подмножества вершин некоторого ориентированного графа на n вершинах (необязательно связного, возможно, с петлями): подмножеству S сопоставляется подмножество всех вершин, в которых можно оказаться, сделав один ход из какой-то вершины, входящей в S (в том числе в $R(S)$ могут лежат некоторые элементы S). Далее всякому множеству S сопоставляется последовательность множеств $S, R(S), R(R(S))\dots$ (другими словами, рассматриваются множества вершин, в которые можно попасть ровно за 0, за 1, за 2 и т.д. ходов из каких-то вершин, входящих в S), обозначим за $A(S)$ количество различных множеств в такой последовательности. Теперь обозначим за $f(n)$ наибольшее возможное значение $A(S)$ (для ориентированного графа на n вершинах). Вопрос состоит в аппроксимации $f(n)$.

Для решения этой задачи в качестве вспомогательного утверждения потребовался ответ на следующий вопрос: «При каком наименьшем k (для данного $n \geqslant 5$) можно гарантированно побывать во всех вершинах сильно связного ориентированного графа на n вершинах, вернувшись в исходную вершину и сделав не более чем k ходов по его ребрам?» Напомним, что сильно связным ориентированным графом называется такой ориентированный граф, в котором из любой вершины можно достичь любой другой (то есть такой, о котором шла речь в задаче 8.6).

Ответ: $k = [\frac{(n+1)^2}{4}]$. В оценке приведем тот же самый граф. Поскольку теперь мы должны не просто обойти всех обычных эльфов, но еще и вернуться к исходному, последнее выражение изменится на $(n-r-2)(r+3) = ((n+1)-(r+3))(r+3)$ передач, максимум которого достигается при $r+3 = [\frac{n+2}{2}]$ и равен $[\frac{(n+1)^2}{4}]$.

В примере также выражение изменится на $m((n+1)-m)$ из-за того, что нужно будет вернуться к первому эльфу. Максимум этого выражения такой же, как и в оценке.

Подробнее о связанных с этим вопросах можно прочесть в следующей статье:

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397586901428.