LXXXIX Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Москва
Издательство МЦНМО
2026

Департамент образования и науки города Москвы
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Московское математическое общество
Факультет математики НИУ ВШЭ
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты `mmo@mccme.ru`

☞ Материалы данной книги размещены на странице

`mmo.mccme.ru/2026/`

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

Председатель оргкомитета LXXXIX ММО
академик РАН *И. А. Тайманов*

Сборник подготовили:

А. Бегунц, А. Блинков, Ю. Богомолов, Д. Бродский, В. Буланкина, Е. Веретенников, Е. Волокитин, А. Волостнов, М. Волчкевич, М. Гасанов, Т. Голенищева-Кутузова, Д. Горяшин, А. Грибалко, Г. Гусев, А. Доледенок, С. Дориченко, М. Евдокимов, П. Закорко, А. Заславский, Т. Казицына, В. Клепцын, И. Климанова, М. Колодей, Д. Копьев, Т. Корчемкина, М. Кошелев, А. Кузнецов, $\boxed{\textit{С. Маркелов}}$*, Г. Мерзон, Г. Минаев, И. Михайлов, Д. Мухин, Ф. Нилов, В. Новиков, А. Осипов, А. Панкратьев, А. Пешнин, А. Пономарев, А. Попов, В. Радионов, А. Распопов, В. Ретинский, И. Русских, М. Серенко,* $\boxed{\textit{И. Сиротовский}}$*, Л. Смирнова, А. Соколов, А. Тертерян, Ю. Тихонов, В. Трещев, М. Федотова, А. Федулкин, А. Хачатурян, Е. Чернышева, Н. Чернятьев, Л. Шатунов, И. Шейпак, Я. Шубин, И. Эльман, И. Ященко*

При поддержке Yandex Education

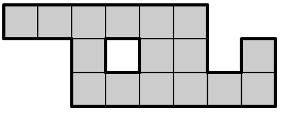
6 класс

1. Маша каждый день читает одинаковое количество страниц. В понедельник она прочитала две трети «Капитанской дочки», во вторник — закончила «Капитанскую дочку» и осилила половину «Ревизора», а в среду — дочитала «Ревизора» и прочитала четверть «Героя нашего времени». В «Герое нашего времени» 200 страниц. А сколько страниц в «Капитанской дочке»? (*И. Русских*)

Ответ: 150.

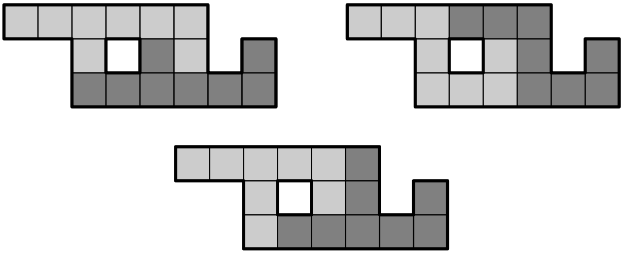
Решение. И во вторник, и в среду Маша прочитала по половине «Ревизора», но во вторник ещё треть «Капитанской дочки», а в среду четверть «Героя нашего времени». Значит, треть «Капитанской дочки» равна по длине четверти «Героя нашего времени», то есть 50 страницам. Поэтому в «Капитанской дочке» 150 страниц.

2. Разрежьте фигуру на две одинаковые части тремя различными способами.



(*С. Маркелов*)

Ответ: см. рисунок.



Комментарий. Симметричную фигуру — например, квадрат или круг — нетрудно разрезать на две равные части многими способами. У фигуры из задачи нет ни центра симметрии, ни оси симметрии, но тем не менее её можно разрезать на две равные части тремя способами. Вы можете попробовать придумать фигуру, у которой нет ни центра, ни оси симметрии, но которую можно разрезать на две равные части четырьмя способами (одно из решений можно найти в статье «Четырьмя различными способами» в журнале «Квантик» №7 за 2018 год).

3. В а н я: Таня, какой у тебя номер телефона?

Т а н я: А ты отгадай! Это 10-значное число. В нём встречаются все цифры, кроме одной.

В а н я: Ну, таких чисел много...

Т а н я: Но оно очень красивое! Смотри: если стереть две его последние цифры, оставшееся число разделится на 2, если стереть три последние цифры — разделится на 3, и т. д., если стереть 9 последних цифр — разделится на 9.

В а н я (подумав): Что-то у меня всё равно несколько вариантов получается...

Т а н я: А если ничего не стирать, тогда на 11 разделится!

В а н я: Вот теперь точно знаю!

Отгадайте и вы Танин номер телефона. Напишите, как вы рассуждали. (*М. Евдокимов, А. Хачатурян*)

Ответ: 9660528471.

Решение. Будем решать задачу с конца. Если стереть 9 последних цифр, останется одна цифра, которая должна делиться на 9. Так как с нуля число начинаться не может, то первая цифра — девятка. Если стереть 8 последних цифр, то останется двузначное число, начинающееся с 9, которое делится на 8, — это только 96. Если стереть 7 последних цифр, то останется трёхзначное число, которое начинается с 96 и делится на 7, — это только 966. Шестёрки повторились, значит, все остальные цифры должны быть разными и отличными от 6 и 9. Действуем далее таким же образом — к известному началу числа приписываем по цифре (неизвестную цифру обозначим звёздочкой), чтобы соблюдалось очередное условие делимости.

Число 966* должно делиться на 6, из 9660 и 9666 годится только 9660.

Число 9660* должно делиться на 5, из 96600 и 96605 годится только 96605.

Число 96605* должно делиться на 4, из 966052 и 966056 годится только 966052.

Число 966052* должно делиться на 3, и из возможных 9660522, 9660525 и 9660528 годится только 9660528.

Число 9660528* должно делиться на 2, у нас осталась только одна незанятая чётная цифра, выбираем 96605284.

Осталось дописать две различные цифры, причём использовать мы можем только 1, 3 и 7. Число 9660528471 делится на 11 ($9660528471 = 11 \cdot 878229861$), остальные же возможные числа 9660528413, 9660528417, 9660528431, 9660528437 и 9660528473 отличаются от 9660528471 на 58, 54, 40, 34 и 2 соответственно, так что делиться на 11 не будут.

Делимость на 11 можно проверить, просто разделив в столбик, но можно и воспользоваться признаком делимости на 11: чтобы проверить, делится ли многозначное число на 11, находят сумму цифр, стоящих на нечётных местах, и сумму цифр, стоящих на чётных. Если разность этих двух сумм делится на 11, то делится и само число. Например, в Танином номере сумма цифр на нечётных местах равна $9+6+5+8+7=35$, а на чётных $6+0+2+4+1=13$. Разность $35-13=22$ делится на 11, значит, и 9660528471 тоже.

4. Алисе, профессору Селезнёву и капитану Зелёному подарили тортик в виде прямоугольного параллелепипеда. Каждый из них отрезал себе по куску толщиной 10 см параллельно одной из граней (то есть отступив от края 10 см с той стороны, с которой захотел) — сначала это сделала Алиса, затем профессор, потом капитан. В итоге Алисе досталась треть тортика, профессору — шестая часть, а капитану — пятая. Какие размеры имел тортик изначально?

(*И. Русских*)

Ответ: 30 см, 40 см, 25 см.

Решение. Алиса, отрезав кусок толщиной 10 см, получила треть тортика. Значит, одна из сторон, поперёк которой она резала, была равна 30 см, а теперь равна 20 см. Профессор не мог отрезать кусок в том же направлении, что и Алиса, иначе он тоже получил бы треть тортика. Значит, он резал поперёк какой-то другой стороны. Полученная им одна шестая тортика составляет от оставшихся двух третей $1/6 : 2/3 = 1/4$, так что его 10 см составили четверть от этой стороны, а вся сторона равнялась 40 см, а теперь равна 30 см.

Для капитана Зелёного осталась $1 - 1/3 - 1/6 = 1/2$ часть тортика со сторонами 20 см, 30 см и ещё одной, пока не известной. Капитану от оставшегося куска тортика достались $1/5 : 1/2 = 2/5$, то есть сторона, поперёк которой он отрезал, была равна $10 : 2/5 = 25$ см. Это не совпадает ни с 20 см, ни с 30 см, так что это именно третье измерение, которое нам оставалось найти.

5. Кощею достались шесть сундуков с золотыми монетами. Всего монет 300, и Кощей знает, сколько монет в каком сундуке лежит. За один ход Кощей выбирает любой набор сундуков (но не все шесть), общее количество монет в которых позволяет распределить их по выбранным сундукам поровну. Затем он уравнивает количества монет в выбранных сундуках, перекладывая монеты между ними.

Всегда ли Кощей может за несколько ходов добиться, чтобы во всех шести сундуках стало поровну монет?

(*И. Русских*)

Ответ: всегда.

Первое решение. Среди шести чисел есть два числа одной чётности. Возьмём два соответствующих сундука и уравняем количество монет в них. Среди оставшихся четырёх сундуков также есть два, где количество монет одной чётности. Уравняем количество монет и в них. Поскольку общее число монет чётно, то в двух оставшихся сундуках суммарное число монет тоже чётно. Уравняв число монет в них, получим три пары равных чисел. Если взять по одному сундуку из каждой пары, то в них в сумме будет 150 монет. Уравняем количество монет в этих сундуках, а затем и в трёх оставшихся.

Второе решение. Можно было рассуждать иначе, начав с делимости на 3. Легко убедиться, что сумма трёх чисел делится на 3, если и только если их остатки при делении на 3 либо все разные, либо все одинаковые. Так как сундуков шесть, а остатков всего три, обязательно найдутся три сундука, суммарное число монет в которых кратно 3. Уравняем количество монет в найденной тройке и в трёх оставшихся сундуках (общее количество монет в них также будет кратно 3, поскольку число монет во всех сундуках кратно 3). После этого разобьём сундуки на пары: один из первой тройки и один из второй. Суммарное число монет в каждой паре одинаково, а значит, равно $300:3=100$, то есть каждую пару Кощей сможет уравнять, и во всех шести сундуках станет по 50 монет.

Комментарий. Отметим, что в приведённых решениях не используется уравнивание монет в четырёх или пяти сундуках. Заметим также, что аналогичным образом можно решить задачу, где у Кощея вместо шести имеется любое другое составное число сундуков (лишь бы суммарное количество монет делилось на количество сундуков).

6. Есть трое песочных часов: большие на 5 минут, средние на 3 минуты и маленькие на 2 минуты. Но в одних из них песка чуть больше, чем надо, и он сыплется на несколько секунд дольше, чем положено. Как найти бракованные часы, затратив меньше пяти минут? (Считаем, что на запуск и переворачивание часов время не тратится.)

(*Т. Казицына*)

Решение. Рассмотрим следующий алгоритм:

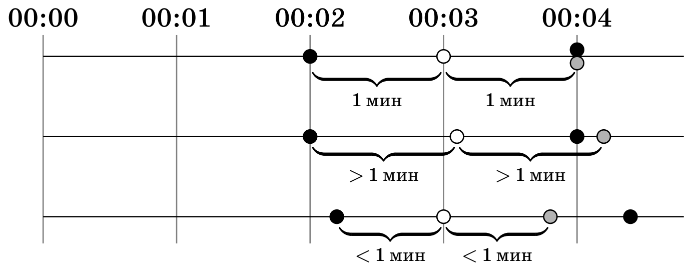
1. Запустим одновременно часы на 2 и на 3 минуты.

2. Как только весь песок в часах на 2 минуты будет внизу, перевернём их и одновременно с этим запустим часы на 5 минут.

3. Как только весь песок в часах на 3 минуты будет внизу, перевернём часы на 5 минут (чтобы уже насыпавшийся песок высыпался обратно).

Дальше будем следить, в каких часах песок кончится раньше: в 2-минутных или в 5-минутных.

Пусть мы начали шаг 1 в 00:00.



Если бракованными были часы на 5 минут, то шаг 2 начнётся в 00:02, а шаг 3 — в 00:03 (верхняя линия на схеме).

В этот момент 2-минутные и 5-минутные часы отмеряют по 1 минуте, и после шага 3 закончат одновременно (в 00:04).

Если бракованными были часы на 3 минуты, то часы на 5 минут запустятся ровно в 00:02, но перевернём обратно мы их позже, чем в 00:03 (средняя линия на схеме). То есть в начале шага 3 в 2-минутных часах сверху будет песка меньше, чем на минуту, а в 5-минутных снизу — больше, и после переворачивания 5-минутные часы «финишируют» позже, чем 2-минутные (причём 2-минутные закончат ровно в 00:04).

Если бракованными были часы на 2 минуты, то часы на 5 минут запустятся позже, чем в 00:02, то есть до переворачивания их в 00:03 пройдёт меньше одной минуты (нижняя линия на схеме). Значит, после переворачивания песок в них закончится раньше, чем в 2-минутных часах (и раньше, чем в 00:04).

Так по результату наблюдений мы поймём, какие часы неисправны, потратив не более 4 минут.

Комментарий. Если ограничения по времени нет, можно отмерить 6 минут с помощью маленьких («2») и с помощью средних («3») часов и сравнить результат:

$$
\begin{aligned}
&«2» + «2» + «2» > «3» + «3» \text{ — бракованные 2-минутные часы,}\\
&«2» + «2» + «2» < «3» + «3» \text{ — бракованные 3-минутные часы,}\\
&«2» + «2» + «2» = «3» + «3» \text{ — бракованные 5-минутные часы.}
\end{aligned}
$$

Но шести минут у нас нет. Как можно уменьшить это время? Вычтем из обеих частей «2»:

$$«2» + «2» \ \ ? \ \ «3» + «3» - «2».$$

В точности такое сравнение и приведено в решении. Разность «3»–«2» мы «запомнили» на 5-минутных песочных часах.

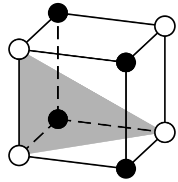
7 класс

1. См. задачу 2 для 6 класса (с. 3).

2. Каждую вершину куба окрасили в чёрный или белый цвет. Обязательно ли найдётся равнобедренный треугольник, все вершины которого одного цвета? (Учитываются и треугольники, не лежащие в одной грани куба.)

(*М. Евдокимов*)

Ответ: не обязательно, см. рисунок.



Решение. В примере на рисунке любой треугольник с тремя вершинами одного и того же цвета — это половина прямоугольника со стороной, равной стороне куба, и стороной, равной диагонали грани куба. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов, поэтому диагональ грани-квадрата больше стороны, а гипотенуза треугольника с вершинами одного цвета ещё больше. Значит, равнобедренных треугольников с вершинами одного и того же цвета при такой раскраске не будет.

Комментарий. Есть много интересных вопросов о существовании равнобедренных треугольников с вершинами одного цвета при произвольной раскраске какого-нибудь набора точек. Например, такой треугольник существует для любой раскраски точек окружности в два цвета (докажите) или в любое конечное число цветов (это уже непросто доказать).

3. Найдите какое-нибудь решение ребуса

$$\text{К,ОН}\cdot\text{Ф,ЕТ}=\text{А}.$$

Разным буквам соответствуют разные цифры; числа с запятой не должны оканчиваться на 0.

(*Т. Казицына, П. Закорко*)

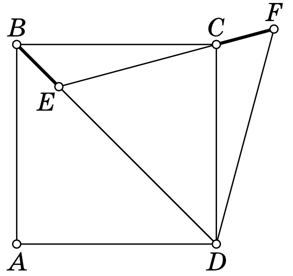
Ответ: $0{,}48\cdot 6{,}25=3$ или $6{,}25\cdot 0{,}48=3$.

Комментарий. Объясним, как можно искать решение. Для начала домножим левую и правую часть на 10000, получим

$$\text{КОН}\cdot\text{ФЕТ}=10000\cdot\text{А}$$

(возможно, К или Ф равно нулю). Числа слева не могут делиться на 10 (они не оканчиваются на ноль). Поскольку $10000=2^4\cdot 5^4$, то один из множителей делится на $2^4 = 16$, а другой на $5^4 = 625$. Так как единственное число, не большее 1000 и кратное 625, равно 625, то один из множителей слева (например, КОН) равен 625. Осталось подобрать второй множитель, он должен делиться на 16. Подходит Ф,ЕТ $= 0{,}48$, получаем решение $6{,}25 \cdot 0{,}48 = 3$. Легко проверить, что это решение единственно с точностью до перестановки множителей.

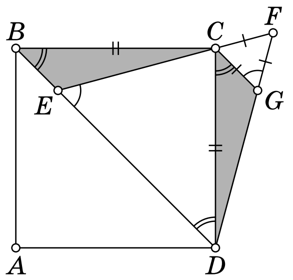
4. Квадрат $ABCD$ и равносторонний треугольник DEF расположены так, как показано на рисунке (точка E лежит на диагонали BD, точка C лежит на стороне EF). Докажите, что $BE = CF$.



(*М. Евдокимов*)

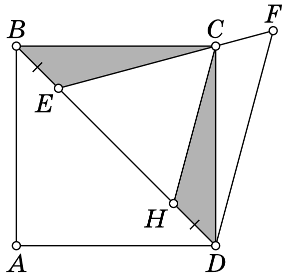
Первое решение. В треугольниках BCE и CDF стороны BC и CD равны (как стороны квадрата), но всё же эти треугольники не равны: в одном из них против стороны квадрата лежит угол 120°, а во втором 60°.

Отметим на отрезке FD такую точку G, что $FG = FC$. В треугольнике CFG две стороны равны и есть угол 60°, поэтому он равносторонний и все его углы по 60° (см. рис.). Треугольники BCE и CDG уже больше похожи на равные, в частности, углы E и G оба равны внешнему углу правильного треугольника (т. е. $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$).



Заметим, что в них есть и ещё одна пара равных углов: $\angle EBC = 45^\circ$ как угол между диагональю и стороной квадрата, но и угол DCG равен углу CDE (ведь CG и ED параллельны), который является углом между диагональю и стороной квадрата. Значит, равны и оставшиеся углы этих треугольников, и вообще эти треугольники равны (по стороне и прилежащим углам). В частности, $BE = CG$. Ну а $CG = CF$ как стороны равностороннего треугольника CFG.

Второе решение. Отложим на BD от точки D отрезок $DH = BE$ (см. рис.). Вместо того, чтобы сравнивать отрезки



CF и BE, сравним $EC = EF - CF$ и $EH = DE - DH = EF - BE$. Рассмотрим треугольники BCE и DCH: $BC = DC$ как стороны квадрата, $BE = DH$ по построению, и углы EBC и EDC равны как углы между диагональю и стороной квадрата. Значит, эти треугольники равны, и $EC = EH$. В равнобедренном треугольнике ECH угол CHE равен 60°, значит, и все его углы равны по 60°, а $EH = EC$, откуда $EF - CF = DE - DH = EF - BE$ и $BE = CF$.

Комментарий. Можно решить задачу и начиная с других дополнительных построений — например, проведя через точку E прямую, параллельную AD.

5. Наиль расставляет в клетках квадрата 6×6 числа от 1 до 36 (по одному числу в каждую клетку, числа не повторяются). После этого Наиль ставит фишку в клетку с числом 1. Далее перед каждым ходом Наиль выбирает наибольшее из чисел, стоящих в соседних с фишкой (по стороне или углу) клетках. Если выбранное число больше, чем в клетке с фишкой, то Наиль передвигает фишку в клетку с выбранным числом; иначе фишка больше не двигается.

а) Приведите пример расстановки чисел, при которой фишка посетит как можно больше клеток.

б) Докажите, что ни при какой другой расстановке чисел не получится посетить больше клеток. (*И. Ященко*)

Решение. а) Расстановка чисел, при которой путь фишки пройдёт по 18 клеткам, приведён на рисунке.

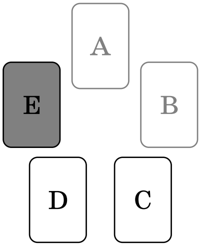
11	12	14	16	18	19
10	9	13	15	17	20
8	7	35	36	21	22
6	5	34	33	23	24
4	3	32	29	25	26
1	2	31	30	28	27

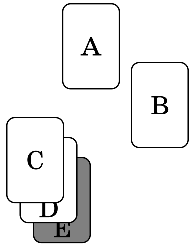
б) Заметим, что в каждом квадрате 2×2 фишка может посетить не больше двух клеток. Действительно, пусть в каком-то квадрате 2×2 фишка сначала посетила число A, потом через некоторое время — число B, большее A, а потом — число C, большее B. Но клетка с C — соседняя с клеткой с A, поэтому, находясь в клетке с A, фишка должна была шагнуть в клетку с числом C (или с большим числом), и посетить клетку с числом B она бы не могла. Противоречие.

Разделив квадрат 6×6 на 9 квадратиков 2×2, получаем, что в каждом из них посещено не более двух клеток, поэтому суммарно фишка посетит не более 18 клеток.

6. Петя и Вася хотят показать следующий фокус. У зрителей есть пять карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5. Две из них они отдают Пете, две — Васе, а одну оставляют себе. Сначала Петя называет число на одной из своих карточек, затем Вася называет число на одной из своих, после чего Петя должен назвать число на карточке у зрителей. Как договориться Пете и Васе, чтобы фокус всегда удавался? (*А. Грибалко*)

Первое решение. Расположим мысленно карточки по кругу в порядке 1, 2, 3, 4, 5. Если двигаться по часовой стрелке, то от одной из карточек Пети до другой нужно сделать не более двух шагов. Обозначим вторую из них E, пусть Петя назовёт число на ней, тогда первая его карточка — C или D (см. левый рисунок).





Соберём мысленно карточки C, D, E в одну стопку (отметим, что в этой стопке две карточки Пети). Карточки Васи лежат в двух из трёх стопок (см. правый рисунок) и от одной до другой можно дойти за шаг по часовой стрелке. Пусть и Вася назовёт число на второй из своих карточек.

Теперь Петя знает обе Васины карточки. Действительно, он знает, в каких стопках они лежат на правом рисунке. И даже если одна из Васиных карточек в стопке C-D-E, то Петя может понять, какая именно, потому что в этой стопке только одна карточка не Петина.

Второе решение. Всего вариантов пар карточек у Пети $(5 \cdot 4) : 2 = 10$, а отдельных карточек 5. Чтобы фокус удался, нужно закодировать варианты так, чтобы называемому Петей числу соответствовали ровно два варианта пар. Это можно сделать так:

Пары карточек у Пети	Петя называет
1, 5 или 1, 4	1
1, 2 или 2, 5	2
1, 3 или 2, 3	3
2, 4 или 3, 4	4
3, 5 или 4, 5	5

Теперь по названному Петей числу Вася может выяснить два варианта оставшегося Петиного числа. Обозначим наименьшее из возможных вторых Петиных чисел как A, наибольшее из них — B, наименьшее из двух оставшихся чисел — C, наибольшее из оставшихся — D.

Поскольку одно из чисел A, B — у Пети, возможно 5 вариантов того, какие две карточки у Васи; пусть он назовёт число в соответствии с таблицей:

Карточки Васи	Вася называет	У зрителей
A, C	C	D
B, C	C	D
C, D	D	A или B (та, которая не у Пети)
A, D	A	C
B, D	B	C

Так по ходу Васи Петя сможет понять, карточка с каким числом осталась у зрителей.

Комментарий. Правильный ход Пети по существу единственен (получается способом, описанным в первом решении при выкладывании карточек в каком-то порядке), а два приведённых решения — это два разных описания одного и того же по сути алгоритма.

8 класс

1. Алиса записала положительные числа a, b, c, d, e (не обязательно целые), а Маруся — числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{e}$. Оказалось, что сумма чисел Алисы больше суммы чисел Маруси. Могло ли произведение чисел Алисы оказаться меньше произведения чисел Маруси? (*Д. Мухин*)

Ответ: да, могло. Пример таких чисел: $a=1000$, $b=c=$ $=d=e=\frac{1}{10}$.

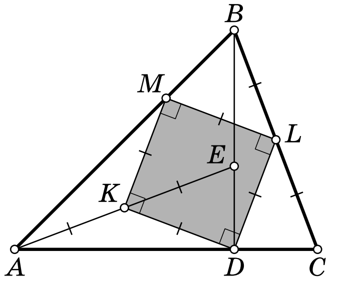
Комментарии. 1. Покажем, как можно подобрать пример в этой задаче. Заметим, что условие $abcde<1 \Leftrightarrow a<\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{e}$ сразу гарантирует и то, что $\frac{1}{abcde}>1>abcde$. Тогда можно выбрать a достаточно большим, а $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ и $\frac{1}{e}$ — маленькими (чтобы сумма Алисы была больше суммы Маруси), но так, чтобы $\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{e}>a$. Подойдёт, например, $a=10^3$, $\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=\frac{1}{d}=\frac{1}{e}=10$.

2. Более того, для выполнения условия достаточно трёх чисел, а все «лишние» числа можно положить равными единице, условия задачи останутся выполненными. Например, $a=89$, $b=c=\frac{1}{10}$, $d=e=1$.

2. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BD внутри треугольника выбрали точку E. K — середина отрезка AE, L — середина отрезка BC. Оказалось, что точки K, D, L — последовательные вершины квадрата. Докажите, что четвёртая вершина квадрата лежит на прямой AB. (*Д. Мухин*)

Первое решение. Пусть M — четвёртая вершина квадрата. В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине, поэтому (учитывая, что $KMLD$ квадрат) все отрезки, отмеченные на рисунке одной засечкой, равны.

В равнобедренном треугольнике AKD обозначим $\angle KAD=$ $=\angle KDA=\alpha$. Углы KDA и BDL равны (так как каждый из них дополняет угол KDE до 90°), и, поскольку треугольник BDL равнобедренный, $\angle DBL=\alpha=\angle KAD$. Тогда прямоугольные треугольники AED и BCD равны (по гипотенузе



и острому углу), причём $AD = BD$, откуда $\angle BAD = \angle ABD = 45^\circ$.

Ясно, что $\alpha < 45^\circ$ (поскольку AE лежит внутри треугольника ABC). Заметим, что $\angle AKD = 180^\circ - 2\alpha$, откуда

$$\angle AKM = 360^\circ - 90^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ + 2\alpha.$$

Тогда, так как треугольник AKM равнобедренный,

$$\angle AMK = \angle MAK = 45^\circ - \alpha.$$

Значит, $\angle MAK$ дополняет $\angle KAD$ до 45°, то есть прямые AM и AB совпадают, M лежит на прямой AB.

Второе решение. Докажем, что E — ортоцентр треугольника ABC. Поскольку BD — высота, достаточно показать, что $\angle EAD + \angle BCD = 90^\circ$; тогда через E будет проходить также высота из A. Пусть $\angle EAD = \alpha$. В прямоугольном треугольнике ADE медиана DK равна половине гипотенузы AE, поэтому $DK = KE$. Тогда треугольник DKE равнобедренный, и $\angle KDE = \angle KED = \angle AED = 90^\circ - \alpha$. Углы KDE и LDC дополняют $\angle BDL$ до 90°, значит, они равны. В прямоугольном треугольнике BDC медиана DL равна половине BC, откуда $DL = LC$ и $\angle BCD = \angle LDC = 90^\circ - \alpha$. Таким образом, $\angle EAD + \angle BCD = \alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$, что и требовалось.

Проведём высоту CM; она пройдёт через ортоцентр E. Докажем, что M и есть четвёртая вершина квадрата. В прямоугольных треугольниках BCM и BCD медиана ML равна половине BC, поэтому $ML = \frac{1}{2}BC = DL$. А в прямоугольных треугольниках AEM и AED медиана MK равна половине AE, поэтому $MK = \frac{1}{2}AE = DK$. По условию $DL = DK$ и $\angle KDL = 90^\circ$, следовательно, $KDLM$ — ромб с прямым углом, то есть квадрат.

Комментарий. Часть рассуждений, связанную с вычислением углов, можно заменить на рассмотрение поворота вокруг точки D на 90°. Нетрудно показать, что при этом треугольник DBC переходит в треугольник DAE. Отсюда следует как равенство углов (необходимое для первого решения), так и перпендикулярность AE и BC (нужная для второго решения).

3. Полина записала число, оканчивающееся на 2026. А Стёпа посчитал сумму всех натуральных делителей этого числа (включая 1 и само число). Мог ли он получить число 1 000 000 001? (*И. Сиротовский*)

Ответ: нет.

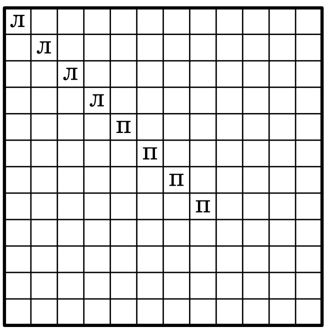
Первое решение. Записанное Полиной число делится на 2, но не делится на 4. Тогда каждому его нечётному делителю d соответствует чётный делитель $2d$, и обратно: каждому чётному делителю d' соответствует нечётный делитель $d'/2$ (если бы $d'/2$ было чётным, то исходное число делилось бы на 4). Следовательно, все делители разбиваются на пары $(d, 2d)$, где d нечётно. Сумма делителей в каждой паре равна $3d$, то есть кратна 3. Тогда и сумма всех делителей кратна 3, но 1 000 000 001 на 3 не делится — противоречие.

Второе решение. Пусть Полина записала число n; оно делится на 2, но не на 4. Тогда в каждой паре делителей $(d, n/d)$ ровно один чётный (этим мы также доказали, что никакой делитель не находится в паре с собой же). Следовательно, сумма делителей в каждой паре нечётна. Поскольку общая сумма делителей нечётна, то и количество пар нечётно. Тогда число $n/2$ имеет нечётное количество делителей, а значит, является точным квадратом. Но n оканчивается на 26, поэтому $n/2$ оканчивается на 3, а точные квадраты не могут оканчиваться на 3 — противоречие.

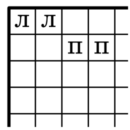
4. Король решил испытать своего придворного мудреца. Он выложил 144 внешне одинаковые золотые монеты в виде квадрата 12×12 и сообщил, что среди них ровно 12 фальшивых монет, которые лежат в ряд (по горизонтали или вертикали). Все настоящие монеты весят одинаково, а фальшивые могут весить по-разному, но каждая из них легче настоящей. Король просит найти 110 настоящих монет за два взвешивания на чашечных весах[1] без гирь. Может ли мудрец действовать так, чтобы гарантированно справиться с заданием короля? (*М. Евдокимов*)

Ответ: да, может.

Решение. Рассмотрим главную диагональ квадрата. Среди монет, лежащих на этой диагонали, ровно одна фальшивая. Первым взвешиванием сравним первую четвёрку монет на диагонали со второй четвёркой. Если какая-то из чаш легче, то фальшивая монета находится среди монет на этой чаше. Если же чаши равны, то фальшивая монета — среди четырёх монет, не участвовавших во взвешивании.



первое взвешивание



второе взвешивание

Без ограничения общности будем считать, что фальшивая монета — среди первых четырёх на диагонали. Тогда ряд из фальшивых монет может оказаться одним из первых четырёх столбцов или одной из первых четырёх строк. Вторым взвешиванием на левую чашу положим первую и вторую монеты из первой строки, а на правую — третью и четвёртую из второй строки. Все фальшивые монеты лежат в одном ряду, поэтому они не могут попасть на обе чаши одновременно. Следовательно:

- если легче левая чаша, то фальшивые монеты — в первой строке, первом столбце или втором столбце;
- если легче правая чаша, то фальшивые монеты — во второй строке, третьем столбце или четвёртом столбце;

[1]Чашечные весы показывают, на какой из двух чаш груз тяжелее. Если грузы весят одинаково, весы показывают равенство. На каждую из чаш можно положить любое количество монет.

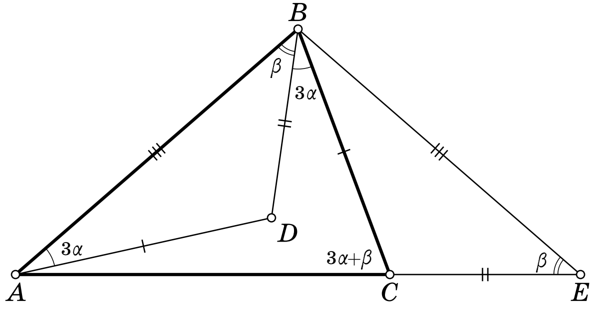
– если чаши в равновесии, то фальшивые монеты — в третьей или четвёртой строке.

В каждом из случаев все монеты, кроме расположенных в указанных линиях, гарантированно настоящие. В первых двух случаях таких монет 110, в последнем — 120.

Комментарий. На самом деле 110 — это максимальное количество монет, которые мудрец может гарантированно назвать настоящими. Докажем это. Всего существует 24 возможных расположения ряда фальшивых монет. Два взвешивания имеют девять различных исходов. Для каждого исхода мудрец указывает один или несколько рядов, в которых согласованно с этим исходом могут находиться фальшивые монеты (монеты, не входящие в эти ряды, гарантированно настоящие). По принципу Дирихле найдётся исход, при котором мудрец укажет не менее трёх рядов. Если это три ряда одного направления, то гарантированно настоящих монет будет $144-3\cdot 12=108$, а если два ряда одного направления и один другого, то $144-3\cdot 12+2=110$.

5. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB=AC$) выбрана точка D так, что $AD=BC$, $\angle DAB=\angle DBC$. Точка K на отрезке BD такова, что $\angle AKD=60^\circ$. Точки K и B различны. Докажите, что $\angle BAK=2\angle KAD$. (*М. Федотова*)

Первое решение. Обозначим $\angle DAB=\angle DBC=3\alpha$, $\angle ABD=$ $=\beta$. Тогда из суммы углов треугольника ABD имеем $\angle ADB=180^\circ-3\alpha-\beta$. Поскольку $AB=AC$, $\angle ACB=\angle ABC=$ $=3\alpha+\beta$. Заметим, что сумма углов ADB и BCA равна 180°. Теперь переложим треугольник ADB так, чтобы сторона AD совпала с отрезком BC, а угол ADB совпал с углом, смежным углу BCA по прямой AC; получим треугольник BCE, точка E лежит на прямой AC. Соответственные углы



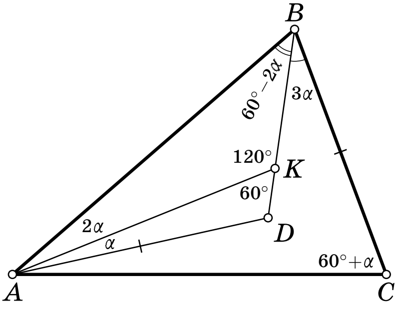
в равных треугольниках равны: $\angle BEC = \angle ABD = \beta$. Соответственные стороны в равных треугольниках равны: $AB = BE$, значит, $\angle BAC = \angle BEA = \beta$. Из суммы углов треугольника ABC имеем $\beta + 2(3\alpha + \beta) = 180^\circ$, откуда $\beta = 60^\circ - 2\alpha$. Из теоремы о внешнем угле для треугольника AKB и угла K:

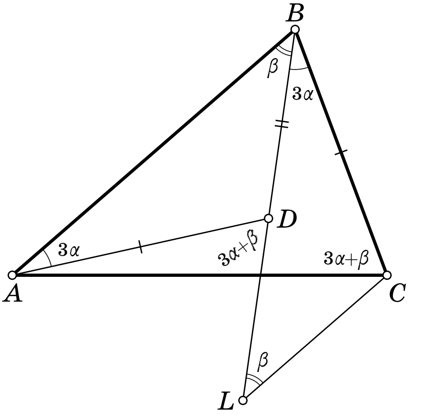
$$\angle AKD = \angle KAB + \angle ABK,$$

то есть

$$\angle KAB = \angle AKD - \angle ABK = 60^\circ - (60^\circ - 2\alpha) = 2\alpha.$$

Учитывая, что $\angle KAD = \angle BAD - \angle BAK = 3\alpha - 2\alpha = \alpha$, получаем искомое отношение (см. рис. слева).





Второе решение. Отметим на луче BD такую точку L, что $BA = BL$ (см. рис. справа). Тогда треугольники ABD и BLC равны по двум сторонам ($AB = BL$, $AD = BC$) и углу между ними ($\angle BAD = \angle LBC$), откуда $\angle ABD = \angle BLC$ как соответственные. Отсюда $AB \parallel LC$, то есть $ABCL$ — трапеция или параллелограмм. Кроме того, $AC = BL$, значит, $ABCL$ — равнобедренная трапеция или прямоугольник и $\angle BAC = \angle ABD$. Далее действуем как в первом решении.

Третье решение. Введём углы α и β так же, как в предыдущих решениях. Воспользуемся теоремой синусов для треугольника ADB:

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - (3\alpha + \beta))} = \frac{AB}{\sin(3\alpha + \beta)}.$$

Теперь запишем теорему синусов для треугольника ABC:

$$\frac{AB}{\sin(3\alpha+\beta)} = \frac{BC}{\sin(180^\circ - 2(3\alpha+\beta))}.$$

Из двух этих равенств получаем, что

$$\sin(180^\circ - 2(3\alpha+\beta)) = \sin\beta.$$

Заметим, что невозможна ситуация, когда

$$180^\circ - 2(3\alpha+\beta) + \beta = 180^\circ.$$

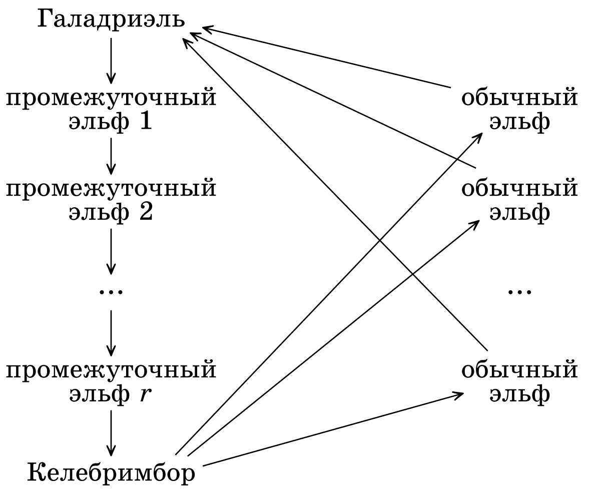
Отсюда следует, что $180^\circ - 2(3\alpha+\beta) = \beta$, то есть $\beta = 60^\circ - 2\alpha$ и $\angle BAK = 2\alpha$.

Комментарий. Можно доказать, что для всякого равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) с углом при вершине A от 36° до 60° (не включая этих значений) существует единственная конструкция, описанная в задаче. Для всех остальных — не существует.

6. В совет входит $n \geqslant 5$ эльфов, каждый из которых доверяет одному или нескольким другим эльфам (доверие необязательно взаимно). Они хотят, чтобы один из эльфов взял Кольцо Всевластья, а затем текущий владелец Кольца передавал его одному из тех, кому доверяет. Известно, что так от любого эльфа Кольцо может перейти (необязательно напрямую) к любому другому. Эльфы хотят действовать так, чтобы в результате k передач Кольца оно хотя бы раз побывало у каждого эльфа. При каком наименьшем k (для данного n) у них обязательно получится это сделать (вне зависимости от того, кто кому доверяет)? (*М. Федотова*)

Ответ: $k = \left[\frac{n^2}{4}\right]$ (целая часть числа $\frac{n^2}{4}$).

Решение. Для начала покажем, что при некоторой схеме доверий Кольцо не сможет побывать у каждого эльфа менее чем за $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ передач. Назовём двух эльфов Келебримбором и Галадриэлью, r эльфов назовём промежуточными (какое r нужно взять, укажем далее), а всех остальных эльфов назовём обычными; их будет $n - r - 2$. Пусть доверие устроено следующим образом: Келебримбор доверяет всем обычным эльфам (и только им), все обычные эльфы доверяют только Галадриэль, а Галадриэль, промежуточные эльфы и Келебримбор образуют цепочку доверий: каждый эльф доверяет



только следующему эльфу в этой цепочке (см. рис.). Легко видеть, что любой эльф (необязательно напрямую) может передать Кольцо любому другому. Заметим, что самый короткий путь от одного обычного эльфа до другого занимает $r+3$ передач. От обычного эльфа Кольцо может попасть только Галадриэль, затем за $r+1$ передачу — Келебримбору (других вариантов нет), и нужна ещё хотя бы одна передача, чтобы достичь другого обычного эльфа. Так как Кольцо должно побывать у всех обычных эльфов, общее количество передач не может быть меньше $(n-r-3)(r+3)$. Взяв $r+3=\left[\frac{n+1}{2}\right]$, получим оценку снизу, равную $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Теперь покажем, что при любом наборе доверий за $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ передач добиться желаемого удастся. *Расстоянием* между двумя эльфами назовём наименьшее количество передач, которое потребуется, чтобы передать Кольцо от первого ко второму. Из всех попарных расстояний выберем наибольшее; пусть оно равно m. Отправим Кольцо по маршруту, реализующему это расстояние. Таким образом Кольцо уже побывает у $m+1$ эльфа, а останется передать его $n-(m+1)$ эльфам. Будем по очереди передавать Кольцо каждому из оставшихся эльфов кратчайшим маршрутом. Длина каждого такого маршрута не превосходит m, поэтому общее число передач составит не более $m+m(n-m-1)=m(n-m)$. Максимум этого выражения при фиксированном натуральном n и натуральном m равен $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Комментарий. На одном из форумов по компьютерным наукам обсуждалась следующая задача. Для некоторого ориентированного (необязательно связного, возможно, с петлями) графа и подмножества S его вершин рассматривается последовательность множеств вершин, в которые можно попасть из вершин, входящих в S, ровно за 0, за 1, за 2 и т. д. ходов. Обозначим за $f(n)$ наибольшее количество различных элементов в этой последовательности для всех возможных ориентированных графов на n вершинах и всех возможных их подмножеств вершин. Вопрос состоит в нахождении асимптотики $f(n)$.

Для решения этой задачи в качестве вспомогательного утверждения потребовался ответ на следующий вопрос: «При каком наименьшем k (для данного $n \geqslant 5$) можно гарантированно побывать во всех вершинах сильно связного ориентированного графа на n вершинах, вернувшись в исходную вершину и сделав не более чем k ходов по его рёбрам?» Напомним, что сильно связным ориентированным графом называется такой ориентированный граф, в котором из любой вершины можно достичь любой другой (то есть такой, о котором шла речь в задаче олимпиады).

Ответ: $k = \left[\frac{(n+1)^2}{4}\right]$. В оценке используем тот же граф. Поскольку теперь мы должны не только обойти всех обычных эльфов, но и вернуться к исходному, последнее выражение изменится на $(n-r-2)(r+3) = ((n+1)-(r+3))(r+3)$ передач. Максимум этого выражения достигается при $r+3 = \left[\frac{n+2}{2}\right]$ и равен $\left[\frac{(n+1)^2}{4}\right]$. В конструкции примера выражение также изменится на $m(n-m+1)$ из-за необходимости вернуться к первому эльфу. Максимум этого выражения такой же, как и в оценке.

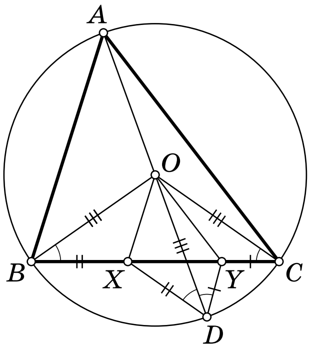
Подробнее о связанных с этим вопросах можно прочесть в статье: *Marek Chrobak*. Finite automata and unary languages // Theoretical Computer Science. 1986. Vol. 47. P. 149–158.

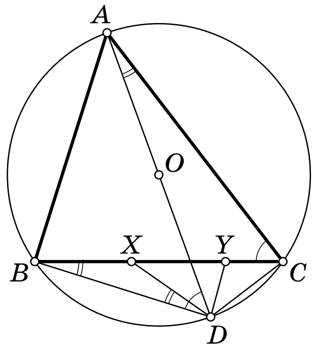
9 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса (с. 15).

2. Дан остроугольный треугольник ABC. На его описанной окружности отмечена точка D, диаметрально противоположная вершине A. Точки X и Y на стороне BC таковы, что $BX = XD$ и $CY = YD$ (точка X лежит на отрезке BY). Докажите, что DA — биссектриса угла XDY. (*А. Доледенок*)

Первое решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Рассмотрим треугольники BOX и DOX. В них $OB = OD$ как радиусы, $BX = DX$ по условию, OX — общая сторона, поэтому они равны по трём сторонам (см. рис. слева). Следовательно, $\angle ODX = \angle OBX$. Аналогично треугольники COY и DOY равны по трём сторонам, поэтому $\angle ODY = \angle OCY$. Но треугольник OBC равнобедренный, поэтому $\angle OBX = \angle OCY$, то есть $\angle ODX = \angle ODY$, что и требовалось доказать.





Второе решение. Так как треугольник BXD равнобедренный, то $\angle BDX = \angle DBX$ (см. рис. справа). Тогда

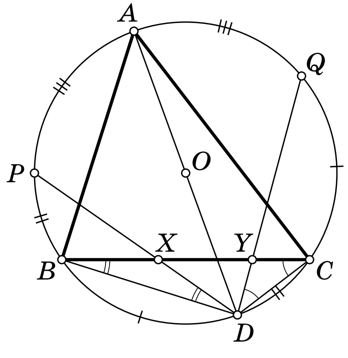
$$\angle ADX = \angle ADB - \angle BDX = \angle ACB - \angle DBX = \angle ACB - \angle DAC.$$

Из равнобедренности треугольника AOC следует, что

$$\angle OAC = 90^\circ - \frac{\angle AOC}{2} = 90^\circ - \angle ABC.$$

Таким образом, $\angle ADX = \angle ABC + \angle ACB - 90^\circ$. Так как это выражение симметрично относительно перестановки вершин B и C, то, аналогично найдя $\angle ADY$, мы получим ту же величину. Следовательно, $\angle ADX = \angle ADY$, что и требовалось доказать.

Третье решение. Продлим прямые DX и DY до повторного пересечения с окружностью в точках P и Q соответственно (см. рис.). Так как из равнобедренности треуголь-



ников следуют равенства вписанных углов $\angle BDP = \angle DBC$ и $\angle CDQ = \angle DCB$, то равны и дуги, на которые они опираются: $\overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{QC} = \overset{\frown}{BD}$. Воспользовавшись равенством полуокружностей, образованных диаметром AD, получим равенство дуг

$$\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{ABD} - \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{ACD} - \overset{\frown}{QC} - \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AQ}.$$

Но тогда равны и вписанные углы ADP и ADQ, опирающиеся на эти дуги, что и требовалось доказать.

3. На столе лежат 11 арбузов массами 1, 2, 3, ..., 11 кг. Алёна и Богдан раскладывают арбузы в четыре пакета; каждый пакет выдерживает 14 кг, а от большего веса рвётся. Они по очереди выбирают арбуз со стола и кладут его в любой из пакетов так, чтобы пакет не порвался. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Алёна. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл другой?

(*Л. Смирнова*)

Ответ: Алёна.

Решение. Покажем, как Алёна может обеспечить себе победу. Первым ходом она положит в один из пакетов арбуз массой 1 кг. Оставшиеся 10 арбузов Алёна мысленно разобьёт на пары {2; 11}, {3; 10}, {4; 9}, {5; 8}, {6; 7}; сумма масс в каждой паре 13 кг.

Пусть Богдан своим первым ходом положит арбуз массой k_1 в какой-то пакет. Тогда Алёна в свой ход положит парный к k_1 арбуз (с массой $13-k_1$) в тот же пакет. После такой пары ходов в этот пакет добавилось 13 кг, и теперь в нём либо 13 кг (если до хода Богдана пакет был пустой), либо 14 кг (если в нём был арбуз 1 кг). В любом случае в этот пакет больше не поместится ни один из оставшихся на столе арбузов.

Пусть своим вторым ходом Богдан положит арбуз массой k_2 в какой-то из трёх оставшихся пакетов. Тогда Алёна опять положит арбуз с массой $13-k_2$ в этот же пакет. Аналогично, в этом пакете теперь либо 13 кг, либо 14 кг, и больше в этот пакет ребята ничего не смогут положить.

Аналогично на следующей паре ходов ребята наполнят третий пакет арбузами k_3 и $13-k_3$, а на следующей — наполнят четвёртый пакет арбузами k_4 и $13-k_4$.

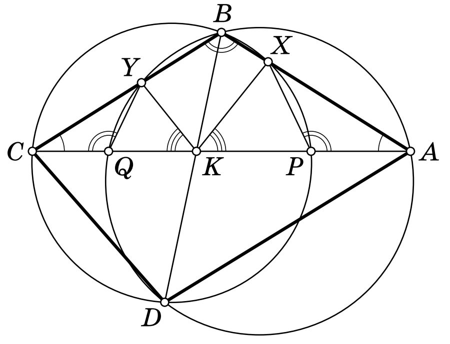
После этого наступит ход Богдана. Но он не может сделать ход, потому что ни в одном из пакетов не осталось более 1 кг свободного места. Значит, Алёна выигрывает.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и BC равны, K — точка пересечения диагоналей. Описанная окружность треугольника ABD повторно пересекает сторону BC в точке Y, а описанная окружность треугольника BCD повторно пересекает сторону AB в точке X. Докажите, что $\angle AKX=\angle CKY$. (*Ф. Нилов*)

Первое решение. Так как треугольник ABC равнобедренный, то $\angle BAC=\angle BCA$. Тогда искомое равенство $\angle AKX= =\angle CKY$ эквивалентно подобию треугольников AKX и CKY. Именно это подобие мы и будем доказывать.

Отметим точки, в которых описанные окружности треугольников ABD и BCD повторно пересекают диагональ AC — точки Q и P соответственно (см. рис.). Из вписанности четырёхугольников $PXBC$ и $QYBA$ имеем равенства углов $\angle APX=180^\circ-\angle CPX=\angle ABC$ и $\angle CQY=180^\circ-\angle AQY= =\angle ABC$. Значит, $\angle APX=\angle CQY$. Таким образом, треугольники APX и CQY подобны (по двум углам), а следовательно, равны отношения сторон в этих треугольниках:

$$\frac{AX}{AP}=\frac{CY}{CQ}. \qquad (1)$$



Используя теорему о произведении отрезков хорд, получим равенства $AK \cdot QK = BK \cdot DK = CK \cdot PK$, откуда

$$\frac{PK}{AK} = \frac{QK}{CK} \;\Leftrightarrow\; \frac{AK - AP}{AK} = \frac{CK - CQ}{CK} \;\Leftrightarrow\; \frac{AP}{AK} = \frac{CQ}{CK}.$$

Почленно перемножив это равенство с равенством **(1)**, получим

$$\frac{AX}{AK} = \frac{CY}{CK}.$$

Вместе с равенством углов $\angle BAC = \angle BCA$ это означает, что треугольники AKX и CKY подобны, что и требовалось.

Второе решение. Как и в предыдущем решении, достаточно доказать, что треугольники AKX и CKY подобны. Для этого, в свою очередь, достаточно показать равенство отношений $AK : CK = AX : CY$, так как равенство углов KAX и KCY следует из равнобедренности треугольника ABC.

По теореме синусов в треугольнике ABK имеем $AK = \sin \angle ABK \cdot BK \;/\; \sin \angle BAK$. Записав аналогичное равенство для треугольника CBK и разделив одно на другое, получаем

$$\frac{AK}{CK} = \frac{\sin \angle ABK}{\sin \angle CBK} \cdot \frac{BK}{BK} \cdot \frac{\sin \angle BCK}{\sin \angle BAK} = \frac{\sin \angle ABK}{\sin \angle CBK}. \qquad (2)$$

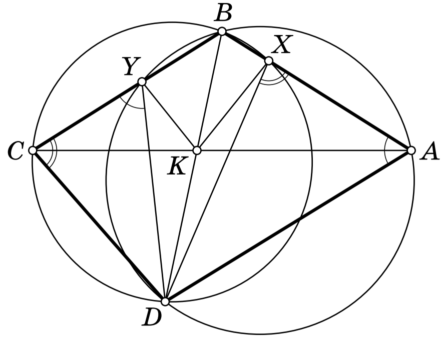
С другой стороны, из теоремы синусов в треугольнике ABD извлекаем $\sin \angle ABD = AD \cdot \sin \angle BAD \;/\; BD$, что после деления на аналогичное равенство для треугольника CBD даёт

$$\frac{\sin \angle ABD}{\sin \angle CBD} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle BCD}.$$

Так как $\angle ABD = \angle ABK$ и $\angle CBD = \angle CBK$, то можно совместить это с равенством (2) и получить

$$\frac{AK}{CK} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle BCD}. \tag{3}$$

Теперь заметим, что треугольники DAX и DYC подобны (см. рис.). Действительно, из того, что $ABYD$ вписанный,



следует, что $\angle DAX = 180^\circ - \angle BYD = \angle DYC$; аналогично из вписанности $CBXD$ следует $\angle DCY = \angle DXA$; этих двух равенств углов достаточно для подобия. Из подобия и из теоремы синусов для треугольника ADX получаем

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AD}{XD} \cdot \frac{XD}{CD} = \frac{\sin \angle DXA}{\sin \angle DAX} \cdot \frac{AX}{CY} = \frac{\sin \angle DCY}{\sin \angle DAX} \cdot \frac{AX}{CY}.$$

Подставляя в (3), находим

$$\frac{AK}{CK} = \frac{\sin \angle DCY}{\sin \angle DAX} \cdot \frac{AX}{CY} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle BCD} = \frac{AX}{CY},$$

что и требовалось.

5. Существует ли бесконечное множество S, состоящее из квадратов натуральных чисел, такое, что для любых двух различных x и y из S найдётся z из S (возможно, совпадающее с x или y), для которого $x + y + z$ — квадрат натурального числа? (*М. Евдокимов*)

Ответ: существует.

Решение. Рассмотрим множество S, состоящее из чисел $1, 2^2, 2^4, 2^6$ и т. д., то есть из всех чётных степеней двойки. Очевидно, все они являются квадратами натуральных чисел.

Проверим, что для любых двух различных чётных степеней двойки можно подобрать третью (возможно, совпадающую с какой-то из этих двух) так, чтобы их сумма оказалась полным квадратом.

Пусть $x = 2^{2m}$ и $y = 2^{2n}$, причём $n > m$. Возьмём в качестве z число $2^{2(2n-m-1)}$. Тогда

$$x + y + z = 2^{2m} + 2^{2n} + 2^{2(2n-m-1)} =$$
$$= 2^{2m} + 2 \cdot 2^m \cdot 2^{2n-m-1} + 2^{2(2n-m-1)} = (2^m + 2^{2n-m-1})^2.$$

6. См. задачу 4 первого дня для 11 класса (с. 40).

10 класс

1. См. задачу 2 для 9 класса (с. 24).

2. Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ с целыми ненулевыми коэффициентами a, b и c, имеющее целый корень. Может ли оказаться, что если увеличить любой из этих трёх коэффициентов на 1, то полученное уравнение останется квадратным и также будет иметь целый корень?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: да, может.

Решение. Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x)=2x^2-5x+2$. Его коэффициенты ненулевые, а также выполнено $f(2)=0$, то есть исходное уравнение имеет целый корень. Сумма коэффициентов многочлена равна $2-5+2=-1$. При увеличении любого из коэффициентов на 1 эта сумма увеличивается на 1 и становится равной нулю. Тогда значение многочлена при $x=1$ равно нулю, то есть число 1 является корнем полученного квадратного трёхчлена. Следовательно, указанный трёхчлен удовлетворяет условию задачи.

3. Имеется двести шариков ста цветов, по два шарика каждого цвета. Фокусник разложил их произвольным образом в сто коробочек, по два шарика в коробочку, где что лежит — игрок не знает. За ход игрок указывает на любые две коробочки, после чего фокусник незаметно для игрока выбирает по шарику из этих коробочек и меняет их местами. Если в какой-то момент в каждой коробочке будут лежать разноцветные шарики, ведущий выдаёт игроку приз. Может ли игрок действовать так, чтобы гарантированно получить приз, как бы фокусник ни менял шарики?

(*Н. Чернятьев*)

Ответ: да, может.

Решение. Разобьём коробочки на 50 пар произвольным образом и занумеруем эти пары натуральными числами от 1 до 50. Будем говорить, что мы применяем операцию к паре, если указываем на две коробочки из этой пары. Назовём пару плохой, если хотя бы в одной из её коробочек лежат шарики одного цвета, и хорошей в противном случае.

Заметим, что если применить операцию к плохой паре, то она обязательно станет хорошей. Действительно, если в одной из коробочек лежат два шарика одного цвета, то в другой коробочке нет шариков этого цвета (так как каждого цвета всего два шарика). Поэтому после обмена в обеих коробочках окажутся шарики разных цветов. Докажем следующую лемму.

Лемма. Для любого натурального $n \leqslant 50$ существует конечная последовательность операций, применяемых к первым n парам, при которой гарантированно найдётся момент, когда все эти n пар будут хорошими.

Доказательство. Будем использовать индукцию по n. При $n = 1$ достаточно применить одну операцию к первой паре.

Пусть утверждение верно для $n - 1$. Докажем его для n. Сначала применим последовательность операций, соответствующую $n - 1$ парам. Затем применим операцию к n-й паре, после чего снова применим ту же последовательность операций к первым $n - 1$ парам.

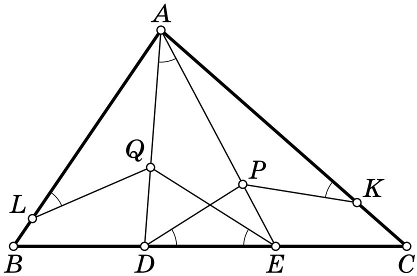
Покажем, что в некоторый момент все первые n пар будут хорошими. Действительно, после первого применения последовательности первые $n - 1$ пар в некоторый момент становятся хорошими. Если в этот момент n-я пара также хорошая, то требуемое выполнено. Иначе применённая к ней операция делает её хорошей. После этого повторное применение последовательности к первым $n - 1$ парам вновь в некоторый момент делает их все хорошими, при этом n-я пара уже остаётся хорошей. Переход доказан.

По лемме при $n = 50$ существует последовательность операций, при которой в некоторый момент все 50 пар будут хорошими, то есть в каждой коробочке будут лежать шарики разных цветов, что и требовалось.

4. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что $BD = DE = CE$. На отрезках AB, AC, AE и AD выбраны точки L, K, P и Q (все точки A, B, C, D, E, K, L, P, Q различные) соответственно так, что

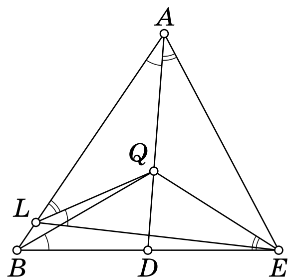
$$\angle EAD = \angle PDE = \angle QED = \angle AKP = \angle ALQ.$$

Докажите, что $LK + DE \leqslant AD + AE$. (*А. Осипов*)



Решение. Сначала докажем, что $AE = LE$. Приведём два возможных способа доказательства.

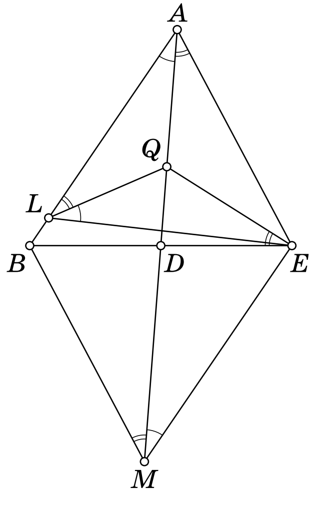
Первый способ. Треугольники DAE и DEQ подобны, так как $\angle DAE = \angle DEQ$ и $\angle EDA = \angle EDQ$. Отсюда следует, что $\frac{DA}{DE} = \frac{DE}{DQ}$, то есть $DE^2 = DA \cdot DQ$. При этом $DE = DB$, поэтому $DB^2 = DA \cdot DQ$. В таком случае треугольники DAB и DBQ также подобны, так как $\frac{DA}{DB} = \frac{DB}{DQ}$ и $\angle BDA = \angle BDQ$. Из этого подобия следует равенство $\angle DAB = \angle DBQ$.

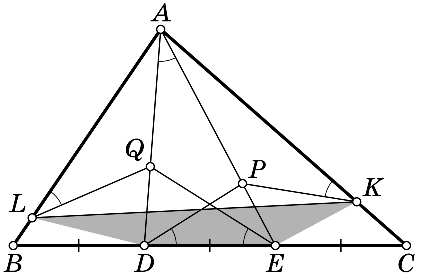


Замечание. Это равенство можно получить иначе, доказав, что точка Q является точкой Шалтая треугольника ABE. Из равенства углов QAE и QED получим, что точка Q лежит на окружности, проходящей через точку A и касающейся BE в точке E, а из того, что она лежит на медиане, однозначно заключаем, что это точка Шалтая. Отсюда следует, что точка Q лежит на окружности, проходящей через точку A и касающейся BE в точке B, что и даёт нам равенство $\angle DAB = \angle DBQ$.

По условию $\angle BEQ = \angle QLA$, поэтому четырёхугольник $EQLB$ — вписанный. Получаем цепочку равенств $\angle DAB = \angle DBQ = \angle ELQ$. Тогда $\angle ELA = \angle ELQ + \angle QLA = \angle DAB + \angle DAE = \angle EAL$, поэтому $AE = EL$.

Второй способ. Продлив отрезок AD за точку D на его длину, получим такую точку M на луче AD, что $AD = DM$, тогда $AEMB$ — четырёхугольник, в котором диагонали делятся точкой пересечения пополам, а значит, параллелограмм. Из параллельности ясно, что $\angle AMB = \angle EAM$. Четырёхугольник $QEMB$ — вписанный, поскольку $\angle QEB = \angle EAM = \angle QMB$, то есть точка E лежит на описанной около треугольника QBM окружности. Четырёхугольник $QLBM$ — вписанный, поскольку $\angle ALQ = \angle DAE = \angle QMB$, то есть точка L лежит на описанной около $\triangle QBM$ окружности. Значит, точки E, L, B и M лежат на одной окружности, а четырёхугольник $ELBM$ с параллельными сторонами EM и LB — равнобедренная трапеция или прямоугольник, тогда $EL = BM = AE$. Получаем требуемое.





Теперь приведём оставшуюся часть решения задачи. Аналогично равенству $AE = LE$ доказывается равенство $AD = DK$. Из условия следует, что отрезки LE и DK пересекаются. Тогда неравенство $LK + DE \leqslant AD + AE$ следует из того, что сумма диагоналей четырёхугольника больше суммы его противоположных сторон.

5. Назовём набор из k последовательных натуральных чисел *хорошим*, если можно у каждого из этих чисел выбрать по простому делителю так, чтобы у всяких двух разных чисел были выбраны разные делители. В противном случае назовём набор *плохим*. При всяком ли натуральном k количество плохих наборов из k последовательных натуральных чисел конечно? (*Ю. Богомолов, А. Тертерян*)

Ответ: да, количество плохих наборов конечно для любого натурального k.

Решение. Для $k=1$ ясно, что существует ровно один плохой набор, который состоит только из единицы. Для $k \geqslant 2$ будем доказывать, что набор $n+1$, $n+2$, ..., $n+k$ является хорошим при любом натуральном $n > k^k$.

Заметим, что любые два числа из этого набора не могут иметь общего делителя, большего k. Действительно, если бы такой делитель существовал, то он делил бы и разность этих чисел, которая меньше k, что невозможно.

Разобьём числа набора на две группы. В первую группу включим числа, имеющие простой делитель, больший k, во вторую — остальные. Каждому числу первой группы сопоставим любой его простой делитель, больший k. Эти простые делители различны, поскольку в противном случае два числа имели бы общий делитель, больший k.

Обозначим через p_1, ..., p_m все простые числа, не превосходящие k. Тогда каждое число второй группы представляется в виде $p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$, где $\alpha_i \geqslant 0$. Для каждого такого числа выберем простой делитель p_i, для которого величина $p_i^{\alpha_i}$ максимальна среди всех $p_1^{\alpha_1}$, ..., $p_m^{\alpha_m}$.

Покажем, что для выбранного i выполнено $p_i^{\alpha_i} > k$. Действительно, если бы для всех i было выполнено $p_i^{\alpha_i} \leqslant k$, то всё число не превосходило бы k^k, что противоречит условию $n > k^k$. Теперь докажем, что выбранные простые делители не совпадают. Действительно, если одно из чисел набора делится на $p^\alpha > k$, а другое число набора делится на $p^\beta > k$, то у этих двух чисел есть общий делитель $p^{\min(\alpha,\beta)} > k$, что невозможно.

Ясно, что двум числам из разных групп также сопоставлены разные простые делители. Получаем, что все плохие наборы содержатся среди наборов с $n \leqslant k^k$, а значит, их конечное число.

Комментарий. Условие задачи можно переформулировать на языке теории графов. Построим двудольный граф, в котором вершины первой доли соответствуют числам набора, а вершины второй доли — простым делителям этих чисел. Соединим вершину числа и вершину простого числа ребром тогда и только тогда, когда это число делится на данный простой делитель. В такой формулировке задача сводится к поиску паросочетания, покрывающего все вершины первой доли. Это, в частности, связано с теоремой Холла о паросочетаниях в двудольных графах.

6. Дано натуральное $n \geqslant 2$. Симметрический многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ таков, что уравнение $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ имеет вещественные решения, причём все эти решения получаются перестановкой чисел из одного-единственного набора $a_1, \ldots, a_n$. Известно, что в этом наборе есть хотя бы два различных числа. Для каждого $n \geqslant 2$ найдите наименьшую возможную степень многочлена P. (*Е. Волокитин*)

Ответ: 4 для любого $n \geqslant 2$.

Решение. Рассмотрим многочлен четвёртой степени

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i^2 x_j^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)^2.$$

Если $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ и $a_i a_j = 0$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$. В таком случае одно из чисел этого набора должно быть равно единице, а все остальные числа равны нулю. При этом все перестановки набора из $n-1$ нуля и одной единицы являются решениями $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Таким образом, данный многочлен подходит под условие.

Теперь покажем, что степень многочлена не может быть меньше четырёх. Без ограничения общности, пусть $a_1 \neq a_2$. Зафиксируем все остальные числа $a_3, \ldots, a_n$ и рассмотрим многочлен от двух переменных $Q(x, y) = P(x, y, a_3, \ldots, a_n)$. По условию Q симметрический, и $Q(x, y) = 0$ только тогда, когда $\{x, y\} = \{a_1, a_2\}$. Покажем, что $\deg Q \geqslant 4$.

Предположим, что $\deg Q \leqslant 3$. Любой симметрический многочлен от двух переменных степени не выше 3 можно записать в виде

$$Q(x, y) = a(x^3+y^3) + b(x^2y+xy^2) + c(x^2+y^2) + dxy + e(x+y) + f.$$

Возьмём произвольное число a', отличное от a_1 и a_2. Рассмотрим многочлен $Q(x, a')$ от одной переменной. Он не может иметь третью степень, так как иначе он имел бы корень. Получаем, что $a = 0$. Тогда также выполнено $b = 0$, иначе $Q(x, x)$ был бы третьей степени и имел корень.

Таким образом, мы можем представить наш многочлен в виде $Q(x, y) = c(x^2 + y^2) + dxy + e(x + y) + f$.

Рассмотрим случай $c = 0$. Многочлен Q не может быть постоянным, поэтому хотя бы одно из чисел d и e не равно нулю. В таком случае мы можем подобрать a'', отличное от a_1 и a_2, такое, что $da'' + e \neq 0$. Это означает, что многочлен $Q(x, a'')$ линейный и имеет корень, чего быть не может.

Рассмотрим случай $c \neq 0$. Без ограничения общности, будем считать, что $c > 0$. Уравнение $Q(x, a_1 + a_2 - x) = 0$ должно иметь ровно 2 различных корня a_1 и a_2. Получаем квадратный трёхчлен с двумя корнями, поэтому у него найдётся отрицательное значение $Q(x_1, y_1) < 0$. Осталось заметить, что $Q(x, y_1)$ является квадратным трёхчленом с положительным старшим коэффициентом c и отрицательным значением, поэтому имеет два корня, что противоречит условию.

Таким образом, предположение $\deg Q \leqslant 3$ приводит к противоречию, и поэтому $\deg Q \geqslant 4$, а значит, и $\deg P \geqslant 4$.

11 класс, первый день

1. Можно ли расставить в вершинах и в серединах рёбер правильного октаэдра по одному натуральному числу от 1 до 18 так, чтобы все числа были различны, а в каждой вершине стояло число, равное сумме четырёх чисел, стоящих в серединах исходящих из этой вершины рёбер?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Предположим, что требуемая расстановка существует. Далее можно рассуждать по-разному.

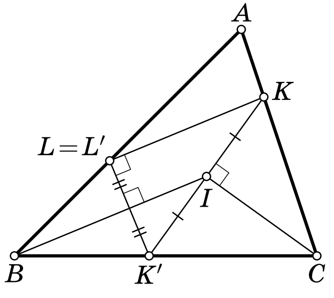
Первый способ. Рассмотрим сумму чисел в двух противоположных вершинах октаэдра. С одной стороны, эта сумма равна сумме чисел, стоящих в серединах восьми рёбер, исходящих из этих двух вершин, а, поскольку все эти числа различны, она не меньше, чем $1+2+3+4+5+6+7+8=36$. С другой стороны, сумма двух различных чисел, не превосходящих 18, не больше, чем $17+18=35$. Противоречие.

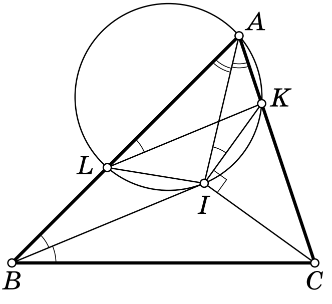
Второй способ. Поскольку у октаэдра 12 рёбер, а все расставленные числа различны, в середине хотя бы одного из рёбер стоит число, не меньшее 12. Но тогда в каждой из вершин, соединённых этим ребром, должно стоять число, не меньшее $12+1+2+3=18$, что невозможно.

Третий способ. Заметим, что в шести вершинах октаэдра могут стоять только числа 13, 14, 15, 16, 17, 18. Действительно, если бы какое-то из них стояло в середине ребра, то в вершине, являющейся концом этого ребра, стояло бы число, не меньшее $13+1+2+3=19$. Сумма чисел от 13 до 18 нечётна, так как среди них ровно три нечётных. Но из условия следует, что сумма чисел, стоящих в вершинах октаэдра, должна быть равной удвоенной сумме чисел, стоящих в серединах рёбер, и поэтому чётной. Противоречие.

2. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. На сторонах AC и AB взяли точки K и L соответственно так, что прямая IK перпендикулярна CI, а KL параллельна BI. Докажите, что треугольник LKI — равнобедренный. (*М. Евдокимов*)

Первое решение. Пусть точка K' симметрична точке K относительно биссектрисы CI, а точка L' симметрична точке K' относительно биссектрисы BI (см. рис. слева). Тогда BI проходит через середины отрезков $K'L'$ и KK', а значит, содержит среднюю линию треугольника $K'L'K$, параллельную стороне KL'. Поэтому прямая KL' параллельна BI, откуда следует, что точка L из условия задачи совпадает с L'. Так как прямая BI перпендикулярна $K'L$, получаем также, что угол KLK' равен 90°. Осталось заметить, что LI является медианой в прямоугольном треугольнике KLK', проведённой к гипотенузе KK', поэтому $LI = KI$, что и требовалось доказать.





Второе решение. Заметим, что

$$\angle AIC = 180^\circ - \angle IAC - \angle ICA = 180^\circ - \frac{\angle BAC + \angle BCA}{2} = \\ = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\angle ABC}{2}.$$

Тогда

$$\angle AIK = \angle AIC - \angle CIK = \angle AIC - 90^\circ = \frac{\angle ABC}{2} = \angle ABI = \angle ALK.$$

Последнее равенство выполнено, так как прямая KL параллельна BI по условию задачи. Следовательно, точки A, K, L и I лежат на одной окружности ω (см. рис. справа). Поскольку AI — биссектриса угла KAL, то I — середина дуги LK окружности ω, откуда следует, что $IK = IL$.

3. Петя и Вася играют в следующую игру. Сначала они пишут по единице, каждый на своей доске. Далее они по очереди (начинает Петя) заменяют каждый своё число, умножая его либо на 2, либо на 3, причём после каждого хода числа, записанные на досках, должны быть различными. Пусть a — количество натуральных делителей числа Пети после его 100-го хода, а b — количество натуральных делителей числа Васи после его 100-го хода. По итогам игры Петя получает $|a-b|$ фантиков. При каком наибольшем натуральном n Петя может действовать так, чтобы гарантированно получить не менее n фантиков вне зависимости от действий Васи? (*И. Михайлов*)

Ответ: 99.

Решение. *Стратегия Пети*. Покажем, как Пете действовать так, чтобы по итогам игры получить 99 фантиков. Пусть Петя на k-м ходу заменяет своё число на $2\cdot 3^{k-1}$. Это возможно, поскольку для каждого натурального числа l после l ходов Пети и $(l-1)$-го хода Васи в разложении числа Пети на простые множители участвует ровно на один сомножитель больше, чем в разложении числа Васи, поэтому их числа после хода Пети совпасть не могут. Индукцией по k докажем, что тогда после k ходов Васи на его доске написано число 3^k.

База: при $k=1$ Васе запрещено писать число 2, поэтому он запишет число 3.

Переход: если после k ходов на досках Пети и Васи записаны числа $2\cdot 3^{k-1}$ и 3^k соответственно, то после $(k+1)$-го хода Пети согласно описанной стратегии на его доске будет написано $2\cdot 3^k$. Тогда Вася не сможет умножить своё число на 2, поскольку в таком случае числа на досках оказались бы равными, то есть запишет число 3^{k+1}, что и требовалось доказать.

Из доказанного утверждения следует, что после окончания игры на досках Пети и Васи будут записаны числа $2\cdot 3^{99}$ и 3^{100} соответственно. Значит, $a=2\cdot 100$, $b=101$, а Петя получит $200-101=99$ фантиков.

Стратегия Васи. Покажем теперь, как Васе действовать так, чтобы по итогам игры Петя получил не больше 99 фантиков. Без ограничения общности будем считать, что первым ходом Петя записал на своей доске число 2 (если он записал число 3, то рассуждение аналогично). Тогда пусть Вася своим первым ходом запишет число 3, а далее для каждого $k=2, 3, \ldots, 100$ на k-м ходу умножает своё число на то же число (2 или 3), на которое умножает своё число Петя на его k-м ходу. Таким образом, после каждого хода

Васи отношение его числа к числу Пети будет оставаться равным $3/2$.

Тогда для каждого $k=2, \ldots, 100$ если после k ходов Пети на его доске записано число $2 \cdot 3^m \cdot 2^n$, где $m+n=k-1$, то после k ходов Васи на его доске записано число $3 \cdot 3^m \cdot 2^n$, отличное от $2 \cdot 3^m \cdot 2^n$. Пусть после 100 ходов Пети на его доске записано число $3^m \cdot 2^{n+1}$ для некоторых неотрицательных целых чисел n и m с суммой $m+n=99$. Тогда после 100 ходов Васи на его доске будет записано число $3^{m+1} \cdot 2^n$. Значит, по итогам игры Петя получит не более

$$\begin{aligned}|a-b| &= |(n+2)(m+1)-(n+1)(m+2)| = \\ &= |(n+2)(100-n)-(n+1)(101-n)| = \\ &= |200+100n-2n-n^2-(101+101n-n-n^2)| = \\ &= |99-2n| \leqslant 99\end{aligned}$$

фантиков, где последнее неравенство выполнено, поскольку $0 \leqslant n \leqslant 99$.

4. В гостинице $a>1$ этажей, на каждом этаже b одноместных номеров. На математический конгресс приехало ab математиков. Оказалось, что каждому математику на каждом этаже нравится ровно один номер. Докажите, что число способов поселить всех математиков в гостиницу так, чтобы каждому нравился его номер, чётно.

(*В. Ретинский*)

Первое решение. Будем называть этажи, кроме первых двух, *верхними*. Зафиксируем произвольное расселение на всех верхних этажах. Покажем, что количество способов дополнить его до полного расселения чётно.

Построим граф, в котором $2a$ вершин соответствуют номерам на первых двух этажах. Для каждого математика, которого мы не поселили на верхних этажах, проведём ребро, соединяющее два подходящих ему номера. Получим граф G, в котором $2a$ вершин и $2a$ рёбер.

Если в графе G есть вершина v степени 1, то в соответствующий номер можно поселить только одного математика. Поселим математика в этот номер, а из графа G удалим вершину v и исходящее из неё ребро. Будем делать такие шаги, пока в графе остаются висячие вершины.

В итоге мы получим непустой граф G'. Действительно, рассмотрим самую последнюю удалённую висячую вершину — исходящее из неё ребро соединяло её с другой вершиной, которая уже не могла быть удалена; то есть хотя бы одна вершина в G' должна остаться.

Если в графе G' найдётся изолированная вершина v, то в некоторый номер нельзя поселить никакого математика. Тогда количество способов расселить всех равно 0, что является чётным числом.

В ином случае в графе G' нет вершин степени 0 и 1, то есть степень каждой вершины не меньше 2. Отсюда следует, что суммарная степень всех вершин не меньше удвоенного количества вершин. С другой стороны, вершин и рёбер поровну, так как изначально в графе G их было поровну, а каждым шагом мы удаляли одну вершину и одно ребро. Значит, суммарная степень вершин (всегда равная удвоенному количеству рёбер) в точности равна удвоенному количеству вершин. Отсюда следует, что степени всех вершин равны 2.

Тогда граф G' является объединением нескольких непересекающихся циклов. (Это утверждение, известное как лемма о хороводах, следует из того, что если выйти из любой вершины, то можно единственным способом идти по рёбрам и зациклиться; таким образом каждой вершине сопоставляется единственный содержащий её цикл.) Нетрудно видеть, что для каждого цикла есть ровно два способа сопоставить вершинам-номерам рёбра-математиков: если цикл нарисовать по кругу, то можно либо каждой вершине сопоставить правое ребро, либо каждой — левое. Тогда если граф G' состоит из $c \geqslant 1$ циклов, то количество способов расселить математиков равно 2^c, что является чётным числом.

Таким образом, мы доказали, что если фиксировать расселение на всех верхних этажах, то количество способов дополнить его до полного расселения чётно. Осталось просуммировать полученные величины по всем способам расселения в верхних этажах. С одной стороны, мы получим искомое количество способов расселить всех. С другой стороны, так как сумма чётных чисел чётна, то результат будет чётным.

Комментарий. Эту идею можно реализовать и иначе, напрямую построив разбиение расселений на пары. Рассмотрим произвольное расселение и построим ориентированный граф, вершинами которого будут номера первых двух этажей; ребро выходит из номера A в номер B на другом этаже, если математику, живущему в A, нравится B.

Из каждой вершины, таким образом, выходит ровно одно ребро. Значит, мы можем выйти из любой вершины и идти по рёбрам, пока не зациклимся (не обязательно при этом вернувшись в исходную). Если вершина участвует в цикле, то цикл восстанавливается однозначно (можно просто начать из данной вершины и идти по рёбрам); следовательно, циклы не пересекаются.

Из всех циклов выберем тот, в который мы придём, начав из первого номера первого этажа. Этот цикл будем называть *главным*. Заметим, что если мы переселим каждого математика в главном цикле в следующий номер по циклу (в направлении ориентированных рёбер), то мы получим ещё одно корректное расселение. При этом сам главный цикл останется циклом — лишь поменяются направления всех его рёбер. Математики вне цикла остались на месте, поэтому остальные рёбра сохранятся. Значит, если мы в новом расселении выберем главный цикл, он будет тем же самым (только с перевёрнутыми рёбрами). Применив переселение ещё раз, мы вернёмся в исходное расселение.

Таком образом, каждое расселение сопоставлено другому, причём сопоставление взаимно. Такое сопоставление разбивает все расселения на пары, откуда следует, что их чётное число.

Второе решение. Приведём решение, использующее линейную алгебру. Во избежание перегрузки слова «номер» будем называть гостиничные номера *комнатами*.

Занумеруем математиков числами от 1 до ab; комнаты тоже занумеруем числами от 1 до ab, причём так, чтобы этажи соответствовали последовательным блокам чисел. Построим матрицу M размера $ab \times ab$, где число $M_{i,j}$ в i-й строке и j-м столбце определяется следующим образом:

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-му математику нравится } j\text{-я комната;} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Расселение можно представить как перестановку $\sigma \in S_{ab}$ (т. е. функцию $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, ab\} \to \{1, 2, \ldots, ab\}$), сопоставляющую номеру математика номер комнаты. Тогда количество подходящих расстановок равно перманенту матрицы M:

$$\operatorname{perm}(M) = \sum_{\sigma \in S_{ab}} \left(\prod_{i=1}^{ab} M_{i,\sigma(i)} \right).$$

Действительно, если данная перестановка σ подходит, то все сомножители $M_{i,\sigma(i)}$ будут равны 1, а если не подходит, то хотя бы один из сомножителей равен 0.

Так как нас интересует только чётность выражения, то можно произвольно менять знаки перед слагаемыми. Заменив знак перед каждым произведением на чётность перестановки $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$, получим определитель матрицы M:

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_{ab}} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{ab} M_{i,\sigma(i)} \right).$$

Теперь заметим, что векторная сумма b столбцов матрицы, соответствующих комнатам первого этажа, равна столбцу из единиц, так как у каждого математика есть ровно одна комната на этом этаже, которая ему нравится. Такая же сумма у b столбцов матрицы, соответствующих второму этажу. Следовательно, столбцы матрицы линейно зависимы, то есть она вырожденная; а так как определитель любой вырожденной матрицы равен нулю, то он чётен.

5. Надя загадала многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. За один ход Максим может назвать любой многочлен $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, а в ответ Надя должна сообщить Максиму следующие два факта:

- достигается ли максимальное значение $P+Q$, и если да, то чему оно равно;
- достигается ли минимальное значение $P+Q$, и если да, то чему оно равно.

Максим хочет последовательно сделать несколько таких ходов, а затем назвать такое вещественное число t, что $|P(2026) - t| < 10^{-100}$. Докажите, что Максим может действовать так, чтобы гарантированно добиться желаемого. (Максим сам решает, когда ему перестать задавать вопросы.)

(*Л. Шатунов*)

Решение. Пусть Максим всегда называет такие многочлены $Q(x)$, что $Q(2026)=0$, тогда значения многочленов P и $P+Q$ в точке 2026 совпадают. Разобьём стратегию Максима на два шага. На первом он найдёт ограничение на степень многочлена P. А на втором он зажмёт значение $P(2026)$ между двумя «близкими» числами.

Первый шаг. Пусть Максим последовательно называет многочлены вида $\pm(x-2026)^{2n}$ для $n=1, 2, \ldots$, пока не услышит, последовательно назвав многочлены $(x-2026)^{2k}$ и $-(x-2026)^{2k}$, что сумма P с первым из них достигает минимума, а сумма P со вторым из них достигает максимума.

Такое происходит тогда и только тогда, когда $P(x)+(x-2026)^{2k}$ и $P(x)-(x-2026)^{2k}$ — многочлены чётной степени, первый с положительным старшим коэффициентом, а второй — с отрицательным. То есть это заведомо произойдёт — либо когда $2k$ станет равно степени многочлена P, либо как только $2k$ станет больше этой степени.

Второй шаг. Если многочлен $P(x)+(x-2026)^{2k}+Q_n(x)$ имеет чётную степень, положительный старший коэффициент и принимает значение $P(2026)$, то он имеет минимум, который не больше $P(2026)$. В аналогичной ситуации многочлен $P(x)-(x-2026)^{2k}-Q_n(x)$ имеет максимум, который даёт оценку сверху на $P(2026)$.

Осталось найти подходящую последовательность многочленов Q_n, для которой с какого-то момента эти две оценки на $P(2026)$, сверху и снизу, мало отличаются друг от друга. Покажем, что подойдёт, например, последовательность $Q_n(x)=n^3(x-2026)^2$.

Действительно, при $|x-2026|\geqslant 1/n$ имеем $|Q_n(x)|\geqslant n$. Поэтому, как бы сильно минимум $P(x)+(x-2026)^{2k}$ ни отличался от $P(2026)$, с какого-то момента для всех таких x, что $|x-2026|\geqslant 1/n$, значение $P(x)+(x-2026)^{2k}+Q_n(x)$ станет больше, чем $P(2026)$ (если минимум равен $P(2026)-c$, то достаточно взять $n>c$). Поэтому минимума многочлен $P(x)+(x-2026)^{2k}+Q_n(x)$ достигает при $|x-2026|<1/n$. Но с некоторого n, в силу непрерывности многочлена $P(x)+(x-2026)^{2k}$, его значения на интервале $|x-2026|<1/n$ отличаются от значения в точке 2026 не более чем на 10^{-100}. Для этих n (в силу неотрицательности Q_n) минимум многочлена $P(x)+(x-2026)^2k+Q_n(x)$ не меньше, чем

$P(2026) - 10^{-100}$, но не больше $P(2026)$. По аналогичным соображениям, начиная с некоторого n, максимум многочлена $P(x) - (x - 2026)^{2k} - Q_n(x)$ отличается от $P(2026)$ меньше, чем на 10^{-100}.

Итак, называя многочлены $\pm[(x-2026)^{2k} + Q_n(x)]$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$, Максим в какой-то момент непременно узнает, что $m \leqslant P(2026) \leqslant M$ для некоторых вещественных чисел M и m, отличающихся менее чем на $2 \cdot 10^{-100}$. В этот момент он может остановиться и назвать число $(m+M)/2$, поскольку оно отличается от $P(2026)$ менее чем на 10^{-100}.

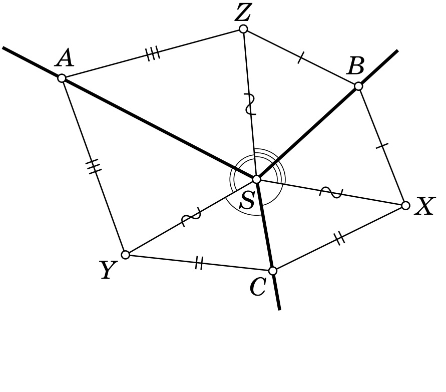
6. В основании выпуклой четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны, а никакие две стороны не равны. Известно, что вписанные сферы тетраэдров $SABC$ и $SACD$ касаются. Докажите, что вписанные сферы тетраэдров $SABD$ и $SBCD$ касаются. (*А. Доледенок*)

Решение. Мы докажем, что оба условия касания сфер равносильны тому, что в пирамиду $SABCD$ можно вписать сферу и она касается основания в точке пересечения диагоналей. Для этого нам понадобятся три известных леммы.

Лемма 1. Пусть сфера вписана в трёхгранный угол $SABC$ и касается грани SBC в точке X. Тогда

$$\angle CSX = \frac{\angle ASC + \angle BSC - \angle ASB}{2}.$$

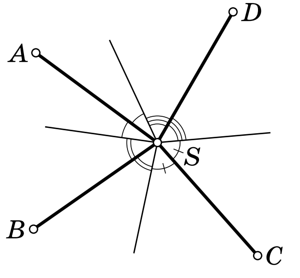
Доказательство. Пусть сфера касается граней SAC и SAB в точках Y и Z соответственно. Отметим равные углы при вершине S в парах равных треугольников (на рисунке показан схематичный вид сверху). Три плоских угла при



вершине S разбились на три пары равных, причём равные углы прилежат к одному ребру трёхгранного угла. Выразив через эти шесть углов углы из формулы, получаем требуемое.

Лемма 2. Сферу можно вписать в выпуклую четырёхугольную пирамиду $SABCD$ тогда и только тогда, когда суммы противоположных плоских углов при вершине S равны.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для выпуклого четырёхгранного угла. Рассмотрим четырёхгранный угол $SABCD$, в который можно вписать сферу. Проведём из точки S лучи в точки касания вписанной сферы с гранями. Аналогично доказательству леммы 1 каждый плоский угол четырёхгранного угла разобьётся на два, причём углы, прилежащие к рёбрам четырёхгранного угла, будут равны (см. рис.).



Пусть в четырёхгранном угле $SABCD$ суммы противоположных плоских углов равны. Рассмотрим сферу ω, которая касается его граней SAB, SBC и SCD. Предположим, она не касается грани SAD. Проведём через прямую SA плоскость, касающуюся ω и отличную от SAB. Пусть эта плоскость пересекается с плоскостью SCD по прямой SD_1. Без ограничения общности будем считать, что луч SD_1 лежит внутри грани CSD. Воспользовавшись утверждением в прямую сторону, получим

$$\angle ASB + \angle CSD_1 = \angle BSC + \angle ASD_1.$$

Воспользовавшись тем, что в четырёхгранном угле $SABCD$ суммы противоположных плоских углов равны, получим

$$\angle CSD_1 - \angle CSD = \angle ASD_1 - \angle ASD \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \angle ASD = \angle ASD_1 + \angle DSD_1.$$

Но по неравенству треугольника для плоских углов трёхгранного угла $SADD_1$ выполнено неравенство

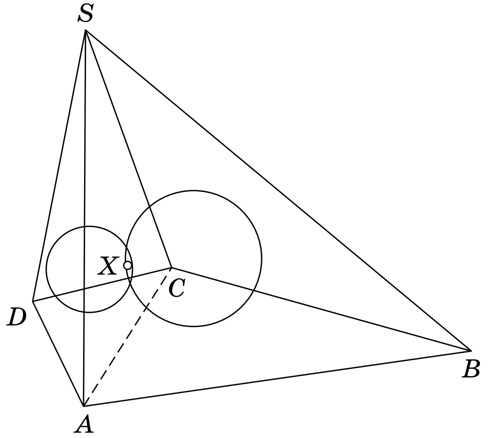
$$\angle ASD < \angle ASD_1 + \angle DSD_1.$$

Полученное противоречие показывает, что ω касается грани SAD, то есть вписана в четырёхгранный угол.

Лемма 3. Пусть в выпуклую четырёхугольную пирамиду $SABCD$ вписана сфера, которая касается плоскости основания в точке T. Тогда $\angle ATB + \angle CTD = 180^\circ$.

Доказательство (набросок). Утверждение эквивалентно тому, что сумма углов BAT, ABT, DCT, CDT равна 180°. Выразив каждый из них по лемме 1, сложим и, воспользовавшись леммой 2, получим требуемое.

Перейдём к решению задачи. Пусть вписанные сферы тетраэдров $SABC$ и $SACD$ касаются в точке X (см. рис.).



Запишем по лемме 1 величину угла CSX двумя способами:

$$\frac{\angle ASC + \angle CSD - \angle ASD}{2} = \frac{\angle ASC + \angle BSC - \angle ASB}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \angle ASB + \angle CSD = \angle BSC + \angle ASD.$$

По лемме 2 полученное равенство эквивалентно тому, что в $SABCD$ можно вписать сферу ω.

Запишем по лемме 1 величину угла CAX двумя способами:

$$\frac{\angle SAC + \angle BAC - \angle SAB}{2} = \frac{\angle SAC + \angle DAC - \angle SAD}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \angle BAC - \angle DAC = \angle SAB - \angle SAD \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\angle BAC = \angle BAD + \angle SAB - \angle SAD \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \angle BAC = \frac{\angle BAD + \angle SAB - \angle SAD}{2}.$$

Из полученного равенства и леммы 1 следует, что точка T касания ω с гранью $ABCD$ лежит на диагонали AC. По лемме 3 сумма углов, под которыми из точки T видны стороны AB и CD, равна 180°. Несложно видеть, что поскольку диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и он отличен от дельтоида, то на диагонали существует ровно одна подходящая точка — это точка пересечения диагоналей. Таким образом, точка T лежит на диагонали BD.

Для решения задачи теперь достаточно проделать те же выкладки, но в обратном порядке.

- Сфера ω вписана в трёхгранный угол $BCAS$, отсюда, аналогичным образом пользуясь леммой 1, получаем

$$\angle ABT - \angle CBT = \angle ABD - \angle CBD = \angle ABS - \angle CBS.$$

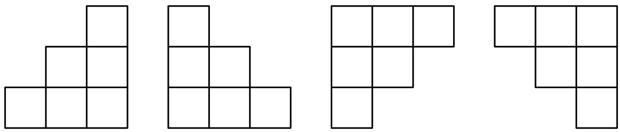
- Обозначим точки касания сфер, вписанных в тетраэдры $SABD$ и $SBCD$, с гранью SBD через Y и Z соответственно. Тогда, записав по лемме 1 углы DBY и DBZ, получим

$$\angle DBY = \angle DBZ \;\Leftrightarrow\; \angle ABD - \angle CBD = \angle ABS - \angle CBS,$$

  что верно, поэтому лучи BY и BZ совпадают. Аналогично доказывается, что лучи DY и DZ совпадают, откуда следует, что точки Y и Z совпадают, то есть сферы касаются.

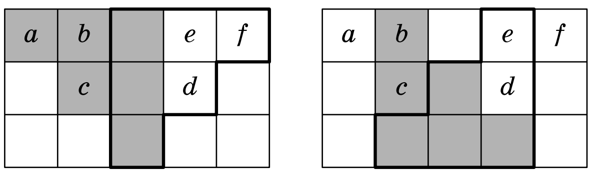
11 класс, второй день

1. В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости записано по одному действительному числу так, что суммы чисел во всех группах клеток, образующих «лесенку» (см. рисунок), одинаковы. Может ли среди записанных чисел быть по крайней мере 89 различных?



(*Жюри*)

Ответ: нет.



Решение. Отметим четыре «лесенки» в прямоугольнике 3×5, как показано на рисунке. Приравняв суммы чисел в них, получим равенства

$$\begin{cases} a+b+c=d+e+f, \\ b+c=d+e, \end{cases}$$

откуда следует, что $a=f$. Таким образом, расстановка чисел на клетчатой плоскости периодична с шагом 4 по горизонтали. Проводя аналогичное рассуждение для прямоугольника 5×3, получим, что она периодична с шагом 4 и по вертикали. Тогда на доске написано не больше $4 \cdot 4 = 16$ различных чисел.

2. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$a + \operatorname{arctg} b > c + \operatorname{arctg} d,$$
$$b + \operatorname{arctg} a > d + \operatorname{arctg} c.$$

Докажите, что $a+b>c+d$. (*М. Гасанов*)

Решение. Если $a \leqslant c$ и $b \leqslant d$, то $a + \operatorname{arctg} b \leqslant c + \operatorname{arctg} d$, что противоречит первому из неравенств в условии задачи. Следовательно, $a > c$ или $b > d$. Без ограничения общности можно считать, что $a > c$. Функция $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ строго возрастает, так как её производная $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ положительна при всех $x \neq 0$. Поэтому $f(a) > f(c)$, т. е. $a - \operatorname{arctg} a > c - \operatorname{arctg} c$. Складывая это неравенство со вторым неравенством из условия задачи, получаем $a + b > c + d$, что и требовалось доказать.

Комментарии. 1. Как видно из решения, утверждение задачи остаётся верным при замене arctg на любую возрастающую дифференцируемую функцию, производная которой меньше 1 при всех x, кроме, возможно, конечного числа точек.

2. Докажем, не используя производную, что функция $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ строго возрастает. Поскольку f нечётна, то достаточно доказать её возрастание при $x \geqslant 0$. Для этого нужно проверить, что при $x \geqslant 0$ и $t > 0$ верно неравенство

$$f(x+t) > f(x) \;\Leftrightarrow\; t > \operatorname{arctg}(x+t) - \operatorname{arctg} x.$$

Поскольку $\operatorname{arctg}(x+t) - \operatorname{arctg} x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, получаем

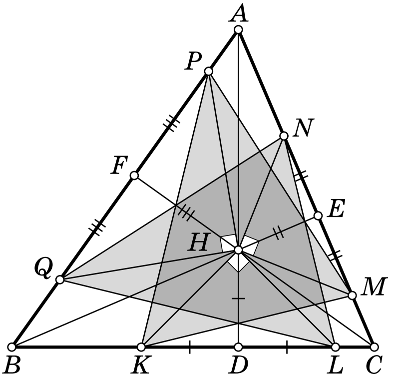
$$\operatorname{arctg}(x+t) - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\bigl(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+t) - \operatorname{arctg} x)\bigr) = \\ = \operatorname{arctg} \frac{t}{1+(x+t)x} \leqslant \operatorname{arctg} t < t,$$

так как $\operatorname{tg} \alpha > \alpha$ при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

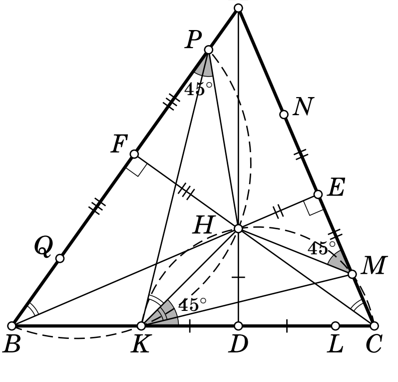
3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE и CF пересекаются в точке H. Три окружности с центрами в точках D, E, F, проходящие через H, пересекают прямые BC, CA и AB соответственно в шести различных точках. Докажите, что эти шесть точек можно разбить на две тройки так, чтобы для двух треугольников, образованных этими тройками точек, нашлась окружность, касающаяся всех шести прямых, содержащих стороны этих треугольников.

(*И. Михайлов*)

Решение. Обозначим через K, L, M, N, P, Q точки пересечения трёх окружностей с центрами в точках D, E, F, проходящих через H, с прямыми BC, CA и AB соответственно, как показано на рисунке.



Первый способ. Заметим, что треугольники HKL, HMN и HPQ — равнобедренные и прямоугольные. Тогда треугольник LNQ получается из треугольника KMP поворотом на 90° против часовой стрелки (см. рис. выше). Значит, данные треугольники равны и, в частности, радиусы их вписанных окружностей также равны. Таким образом, для решения задачи достаточно доказать, что H — центр окружности, вписанной в треугольник KMP. Поскольку $\angle BPH = \angle CKH = \angle AMH = 45^\circ$, четырёхугольники $BKHP$ и $CMHK$ вписанные (см. рис. ниже). Тогда по свойству вписанных углов $\angle HKP = \angle HBP$, $\angle HKM = \angle HCM$. Поскольку $\angle BFC = 90^\circ = \angle BEC$, четырёхугольник $BFEC$ — вписанный, поэтому по свойству вписанных углов $\angle HBP = \angle HCM$. Таким образом, мы показали, что точка H лежит на биссектрисе угла PKM. Проводя аналогичные рассуждения для



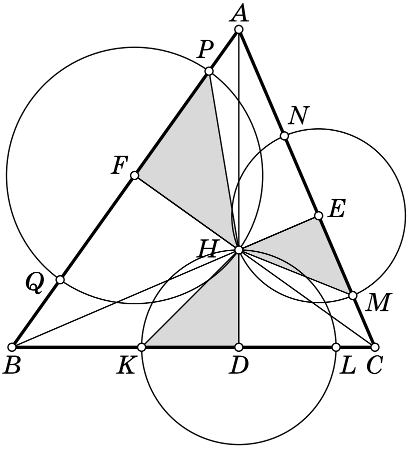
остальных углов треугольника KMP, получаем, что H — центр вписанной окружности этого треугольника, что завершает решение задачи.

Комментарий. Данное решение опирается на приведённое на рисунках выше расположение точек. Рассуждения во всех других возможных случаях расположения точек пересечения трёх окружностей из условия с прямыми, содержащими стороны треугольника, аналогичны.

Второй способ. Поскольку треугольники HKD, HME, HPF — прямоугольные и равнобедренные (см. рис. ниже), выполнены равенства

$$\frac{HK}{HD} = \frac{HM}{HE} = \frac{HP}{HF} = \sqrt{2}.$$

Тогда заметим, что при композиции поворота вокруг точки H на угол 45° по часовой стрелке и гомотетии с центром в H и коэффициентом $\sqrt{2}$ треугольник DEF переходит в треугольник KMP. Поскольку H — центр окружности, вписанной в треугольник DEF (пусть её радиус равен r), получаем, что H — центр окружности, вписанной в треугольник KMP, причём её радиус равен $r\sqrt{2}$. Проводя аналогичное рассуждение для равнобедренных прямоугольных треугольников HDL, HEN и HFQ, получаем, что окружность с центром в точке H радиуса $r\sqrt{2}$ вписана в треугольник LNQ. Таким образом, у треугольников KMP и LNQ общая вписанная окружность, что и требовалось доказать.



4. В классе, состоящем из не менее 5 учеников (девочек и мальчиков), провели контрольную работу. Известно, что во время работы каждая пара школьников пообщалась и ровно один из учеников в этой паре помог другому. В результате оказалось, что для каждого ученика среди тех, кому он помог, поровну девочек и мальчиков. Сколько учеников могло быть в классе? (*М. Гасанов, М. Кошелев*)

Ответ: k^2 для любого натурального числа $k \geqslant 3$.

Решение. Пусть n — количество учеников в классе. Сначала докажем, что n должно быть полным квадратом. Действительно, обозначим количество мальчиков за m, а количество девочек за f. Поскольку мальчики подсказали друг другу $\frac{m(m-1)}{2}$ раз, а девочки подсказали друг другу $\frac{f(f-1)}{2}$ раз, то количество подсказок между учениками одного пола равно $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{f(f-1)}{2}$. Поскольку каждый ученик подсказал одинаковому количеству мальчиков и девочек, то количество подсказок между учениками одного пола равно количеству подсказок между учениками разных полов, которое равно mf. Получаем соотношение

$$\frac{m(m-1)}{2}+\frac{f(f-1)}{2}=mf,$$

откуда $(m-f)^2=m^2-2mf+f^2=m+f=n$.

Итак, мы знаем, что $n=k^2$. Из рассуждений выше следует, что $m-f=\pm k$, откуда $\{m, f\}=\left\{\frac{k(k-1)}{2}, \frac{(k+1)k}{2}\right\}$. Теперь осталось построить пример для таких параметров. Это можно сделать несколькими способами.

Первый способ. Докажем по индукции, что для всякого $k \geqslant 1$ существует конструкция с $(k^2-k)/2$ мальчиками и $(k^2+k)/2$ девочками.

База: $k=1$. *Переход*: возьмём конструкцию A из предположения индукции, добавим k мальчиков и $k+1$ девочку, причём одну девочку выделим (пусть её зовут Таня). Пусть все дети из конструкции A помогают в точности всем добавленным, кроме Тани (то есть они помогли k добавленным девочкам и k добавленным мальчикам). Также пусть Таня помогла всем детям из конструкции A и всем добавленным мальчикам, но не помогла ни одной добавленной девочке (таким образом, она помогла по $(k^2+k)/2$ мальчикам и девочкам). Наконец, занумеруем добавленных детей каждого пола (мальчиков и всех девочек, кроме Тани, по отдельности) числами от 1 до k. Внутри одного пола дети с бóльшими номерами помогают детям с мéньшим номером. Кроме того, девочки помогают мальчикам тогда и только тогда, когда их номер не меньше, чем номер мальчика. Итого, k-я добавленная девочка помогла k девочкам (считая Таню) и k мальчикам, а k-й новый мальчик помог $k-1$ девочкам и такому же количеству мальчиков.

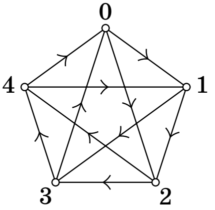
Второй способ. Докажем по индукции, что для всякого $k \geqslant 1$ существует конструкция с k^2 учениками.

База: $k=1$. *Переход*: по предположению индукции есть пример для $n=k^2$. Без ограничения общности будем считать, что в нём $\frac{k^2-k}{2}$ мальчиков и $\frac{k^2+k}{2}$ девочек. Добавим к этому примеру $2k+1$ новых мальчиков, каждый из которых помог всем детям, кроме вновь добавленных. Осталось понять, как взаимодействуют между собой эти $2k+1$ добавленных мальчиков. Построим их по кругу, и пусть каждый поможет k следующим за ним по часовой стрелке мальчикам. Тогда каждый вновь добавленный мальчик поможет $\frac{k^2-k}{2}+k=\frac{k^2+k}{2}$ мальчикам и $\frac{k^2+k}{2}$ девочкам, а каждый ребёнок из изначальной конструкции поможет одинаковому количеству девочек и мальчиков по предположению индукции.

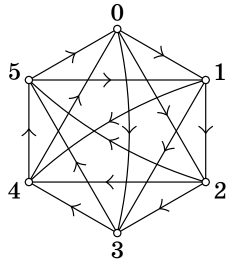
Комментарий. Предъявим один из способов явно построить пример в этой задаче. Для этого нам понадобятся три вспомогательные конструкции.

Конструкция 1. Рассмотрим полный ориентированный граф на $2s+1$ вершине, в котором вершины пронумерованы числами $0, \ldots, 2s$, причём из вершины v выходят рёбра с концами $v+1, \ldots, v+s$ (все числа рассматриваем по модулю $2s+1$). Это задаёт s-регулярный турнир на $2s+1$ вершине. Назовём такую конструкцию $\mathrm{Reg}(2s+1)$ (см. рис. слева).

Конструкция 2. Рассмотрим полный граф на $2s$ вершинах, в котором вершины пронумерованы остатками $0, \ldots, 2s-1$ по модулю $2s$. Направим рёбра следующим образом. Пусть для каждого $v=0, \ldots, 2s-1$ из вершины с номером v выходят рёбра в вершины с номерами $v+1, \ldots, v+s-1$ (все числа рассматриваем по модулю $2s$). Пусть также для каждого $v=0, \ldots, s-1$ из вершины с номером v выходит ребро в вершину с номером $v+s$. Получаем полный ориентированный граф, в котором исходящие



Граф Reg(5)



Граф Circ(6)

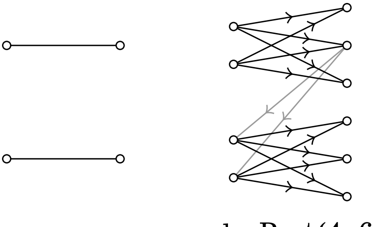
степени вершин с номерами $0, \ldots, s-1$ равны s, а исходящие степени вершин с номерами $s, \ldots, 2s-1$ равны $s-1$. Такую конструкцию назовём $\mathrm{Circ}(2s)$ (см. рис. справа).

Теперь мы готовы строить примеры.

Конструкция 3. Зафиксируем натуральные числа l и r и рассмотрим целые неотрицательные числа a и b, удовлетворяющие условиям $al = br$, $a \leqslant r$, $b \leqslant l$. Пусть, кроме того, $g_l = l/\text{НОД}(l, r)$, $g_r = r/\text{НОД}(l, r)$. Заметим, что из условий следуют соотношения

$$g_r \mid a, \quad \frac{a}{g_r} \leqslant \frac{r}{g_r}, \quad b = \frac{la}{r} = \frac{g_l a}{g_r}.$$

Построим сначала двудольный граф, размеры левой и правой долей которого равны $t = \text{НОД}(l, r)$. Вершины каждой доли будем нумеровать числами от 0 до $t-1$. Для каждого $x \in \{0, \ldots, t-1\}$ добавим в граф рёбра $(x, x+i)$ для $i = 0, \ldots, a/g_r - 1$. Получили (a/g_r)-регулярный двудольный граф. Теперь каждую вершину левой доли превратим в g_l вершин, а каждую вершину правой доли — в g_r вершин. Таким образом, получили граф, левая доля которого имеет размер l, правая — r, степень каждой вершины левой доли равна a, степень каждой вершины правой доли равна b. Наконец, ориентируем все проведённые рёбра так, чтобы они шли из левой доли в правую, а каждую пару несмежных вершин соединим ребром из правой доли в левую (см. рис. ниже). Полученный граф назовём графом $\mathrm{Part}(l, r, a, b)$.



Процесс построения графа Part(4, 6, 3, 2)

Случай 1. Пусть $l = \frac{k(k-1)}{2}$ и $r = \frac{(k+1)k}{2}$ оба нечётные. Заметим, что выполняются соотношения $r \geqslant \frac{l-1}{2}$, $l \geqslant l - \frac{r-1}{2}$, а также равенство $\frac{l(l-1)}{2} = r\left(l - \frac{r-1}{2}\right)$. Построим на множестве мальчиков граф $\mathrm{Reg}(l)$, на множестве девочек — граф $\mathrm{Reg}(r)$, а между ними — граф $\mathrm{Part}\left(l, r, \frac{l-1}{2}, l - \frac{r-1}{2}\right)$. Теперь для каждого ребра (x, y) будем считать, что x помог y. Тогда каждый мальчик помог $\frac{l-1}{2}$ мальчикам и девочкам, а каждая девочка помогла $\frac{r-1}{2}$ мальчикам и девочкам.

Случай 2. Пусть $l = \frac{k(k-1)}{2}$ нечётно, а $r = \frac{(k+1)k}{2}$ чётно. Выделим одну из девочек (пусть её зовут Таня). Скажем, что Тане помогли как все мальчики, так и все остальные девочки. Для оставшихся людей повторим конструкцию из случая 1: для мальчиков — граф $\mathrm{Reg}(l)$, для девочек — граф $\mathrm{Reg}(r-1)$, а между ними — граф $\mathrm{Part}\left(l, r-1, \frac{l-1}{2} - 1, l - \frac{r}{2}\right)$.

Случай 3. Пусть $l = \frac{k(k-1)}{2}$ чётно, а $r = \frac{(k+1)k}{2}$ нечётно. Выделим одного из мальчиков (пусть его зовут Петя). Скажем, что Пете помогли как все остальные мальчики, так и все девочки. Для оставшихся людей повторим конструкцию из случая 1: для мальчиков — граф $\mathrm{Reg}(l-1)$, для девочек — граф $\mathrm{Reg}(r)$, а между ними — граф $\mathrm{Part}\left(l-1, r, \frac{l}{2}, l - \frac{r-1}{2}\right)$.

Случай 4. Пусть $l = k(k-1)/2$ и $r = (k+1)k/2$ оба чётны (отсюда сразу же следует чётность k). Построим на множестве мальчиков граф $\mathrm{Circ}(l)$, на множестве девочек — граф $\mathrm{Circ}(r)$. Теперь пусть F_1, F_2 — половины девочек со степенями $r/2$ и $r/2-1$ соответственно. Построим всех девочек по кругу (причём под номерами $0, \ldots, r/2-1$ будут стоять девочки из F_1), а мальчиков выстроим в ряд. После этого i-й мальчик поможет девочкам с номерами $S_i+1, \ldots, S_i+d_i$ (по модулю r), где d_i есть степень i-го мальчика, а $S_i = d_1 + \ldots + d_{i-1}$. Нетрудно видеть, что скольким-то первым девочкам (более точно, первым $l(l-1)/2 = S_{l+1} \bmod r$ девочкам) поможет $\lceil S_{l+1}/r \rceil$ мальчиков, а остальным — $\lfloor S_{l+1}/r \rfloor$ мальчиков. Осталось проверить соотношения $S_{l+1} \bmod r = r/2$, $\lceil S_{l+1}/r \rceil = r/2$, $\lfloor S_{l+1}/r \rfloor = r/2 - 1$, которые проверяются непосредственно.

5. Назовём натуральное $N > 1$ *хорошим*, если найдутся такие натуральные числа $a_1, \ldots, a_N$, что наибольшие общие делители всевозможных пар из них образуют $N(N-1)/2$ последовательных натуральных чисел. Существует ли хорошее натуральное число, большее 10^{100}? (*А. Тертерян*)

Ответ: не существует.

Решение. Предположим, что найдётся хорошее число $N > 10^{100}$. Тогда найдутся такие натуральные числа a_1, ..., a_N, что наибольшие общие делители всевозможных пар из них образуют $N(N-1)/2$ последовательных чисел — обозначим их b, $b+1$, ..., $b+\frac{N(N-1)}{2}-1$.

Наибольший общий делитель двух натуральных чисел делится на k в точности тогда, когда оба числа делятся на k. Поэтому для любого натурального числа k количество попарных НОД чисел a_1, ..., a_N, делящихся на k, равно $\frac{m(m-1)}{2}$, где m — количество чисел среди a_1, ..., a_N, делящихся на k. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Заметим, что при $N \geqslant 4$ у числа $\frac{N(N-1)}{2}$ найдётся по крайней мере 2 различных простых делителя. В частности, у $\frac{N(N-1)}{2}$ найдётся простой делитель p, отличный от 3. Тогда среди чисел b, $b+1$, ..., $b+\frac{N(N-1)}{2}-1$ ровно p делятся на $\frac{N(N-1)}{2p}$. Однако число вида $\frac{m(m-1)}{2}$ не может быть простым числом, отличным от 3, поскольку при $m \geqslant 4$ у него по крайней мере два различных простых делителя, а при $m=1$, 2, 3 получаем значения 0, 1, 3. Противоречие.

Комментарий. Из этого решения вытекает, что нет хороших чисел, больших 3.

Второй способ. Поскольку попарные НОД чисел a_1, ..., a_N образуют $\frac{N(N-1)}{2}$ последовательных натуральных чисел, то количество c_k чисел среди них, делящихся на k, равно $\left[\frac{N(N-1)}{2k}\right]$ или $\left[\frac{N(N-1)}{2k}\right]+1$. Рассмотрим числа c_N, c_{N+1}, ..., $c_{N(N-1)/2}$. Заметим, что для любого $l=N$, ..., $\frac{N(N-1)}{2}$ числа c_l и c_{l+1} отличаются не больше чем на 3. Действительно, поскольку для каждого $j=1$, ..., $\frac{N(N-1)}{2}$ выполнены неравенства

$$\frac{N(N-1)}{2j}-1 \leqslant \left[\frac{N(N-1)}{2j}\right] \leqslant c_j \leqslant \left[\frac{N(N-1)}{2j}\right]+1 \leqslant \frac{N(N-1)}{2j}+1,$$

имеет место оценка

$$|c_l - c_{l+1}| \leqslant \left|\frac{N(N-1)}{2l} - \frac{N(N-1)}{2(l+1)}\right| + 2 = \left|\frac{N(N-1)}{2l(l+1)}\right| + 2 \leqslant \frac{1}{2} + 2 < 3.$$

Рассмотрим такое минимальное натуральное $l \geqslant N$, что $c_l > c_{l+1}$ (такое найдётся, так как $C_N > 1 = C_{N(N-1)/2}$). Поскольку $c_N \geqslant \frac{N(N-1)}{2N} - 1 > 10^{99} + 4$, а $c_l \geqslant c_N$, получаем, что c_l и c_{l+1} — два числа, большие 10^{99}, отличающиеся не больше чем на 3. С другой стороны, как было отмечено выше, оба числа c_l и c_{l+1} имеют вид $\frac{m(m-1)}{2}$, где m — натуральное. Но при $m > 3$ соседние числа такого вида отличаются хотя бы на 4, поскольку

$$\frac{(m+1)m}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = m > 3.$$

Противоречие.

Третий способ. Положим $t = \frac{N(N-1)}{2}$, $l = \left[\frac{t}{18}\right]$. Тогда

$$18 = \frac{N(N-1)}{2\cdot(t/18)} \leqslant \frac{N(N-1)}{2l} \leqslant \frac{N(N-1)}{2\cdot(t/18-1)} = \frac{t}{t/18-1} = \\ = 18 + \frac{18}{t/18-1} < 19,$$

значит, $\left[\frac{N(N-1)}{2l}\right] = 18$. Среди последовательных чисел b, $b+1, \ldots, b + \frac{N(N-1)}{2} - 1$ кратных l либо $\left[\frac{N(N-1)}{2l}\right]$, либо $\left[\frac{N(N-1)}{2l}\right] + 1$, то есть либо 18, либо 19. С другой стороны, как показано ранее, их количество является числом вида $\frac{m(m-1)}{2}$, а такое число не меньше 21 при $m \geqslant 7$ и не больше 15 при остальных целых неотрицательных m. Противоречие.

6 класс (7318 работ)

	1	2	3	4	5	6
9						4
8					37	43
7				61	3	0
6		3278	553	95	16	4
5		0	149	13	13	1
4	2898	1441	222	34	23	6
3	64	0	76	48	38	4
2	1048	975	258	50	59	13
1	565	1	105	1252	50	198
0	2743	1623	5955	5765	7079	7045

7 класс (5135 работ)

	1	2	3	4	5	6
9						21
8						3
7				318	64	3
6			596	33	17	2
5			9	1	29	3
4	2977	1323	7	28	29	58
3	63	3	2	10	895	0
2	479	9	140	59	132	56
1	269	7	92	22	64	24
0	1347	3793	4289	4664	3905	4965

8 класс (1856 работ)

	1	2	3	4	5	6
$+$	441	223	179	138	61	1
$\pm$	20	14	19	12	3	1
$\mp$	12	43	46	54	5	11
$-$	1175	762	880	1082	638	1009
0	208	814	732	570	1149	834

9 класс (*1202 работы*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	412	499	283	48	57	20
$\pm$	1	4	14	0	5	8
$\mp$	1	8	34	7	5	6
$-$	654	260	620	248	454	410
0	134	431	251	899	681	758

10 класс (*883 работы*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	528	139	74	49	21	3
$\pm$	9	0	15	1	2	1
$\mp$	6	4	12	3	5	3
$-$	219	549	449	261	248	84
0	121	191	333	569	607	792

11 класс, первый день (*813 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	621	476	314	70	8	1
$\pm$	34	0	35	13	8	2
$\mp$	33	0	169	44	25	3
$-$	125	337	295	686	772	807

11 класс, второй день (*287 работ*)

	1	2	3	4	5
$+$	198	69	133	35	13
$\pm$	14	15	1	5	3
$\mp$	4	7	0	83	1
$-$	71	196	153	164	270

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

Мехмат МГУ — крупнейший механико-математический факультет страны и ведущий учебно-научный центр в области математики и механики, в котором представлены все современные разделы этих наук.

Обучение на мехмате даёт академическое образование, позволяющее приобрести фундаментальные знания в области математики и механики, а также умение применять математические методы при решении прикладных задач. Выбор кафедры — углубление в научную деятельность и выбор конкретного направления — происходит только в конце второго курса, что позволяет основательно познакомиться со всеми разделами, прежде чем выбирать более узкую специализацию.

Огромное разнообразие спецкурсов по всевозможным областям математики и механики охватывает все доступные и интересные студентам направления в этих областях и создаёт фактически индивидуальную траекторию обучения, предоставляя обширные возможности для реализации потенциала студентов.

Выпускники мехмата имеют широкие возможности для трудоустройства в сферах научных исследований и преподавания, информационных технологий, финансов и аналитики. Они востребованы такими работодателями, как Сбер, Яндекс, Huawei, Сибур и многими другими.

Мехмат также тесно сотрудничает с ведущими научными институтами страны: Математическим институтом Академии наук имени Стеклова, НИИ механики МГУ, Институтом математики им. Келдыша РАН и другими.

Сайт: `math.msu.ru`
Приёмная комиссия: `pk.math.msu.ru`
Группа ВК: `vk.com/mech.math.lmsu`
Телеграм-канал: Мехмат МГУ `t.me/mech_math_lmsu`
Группа ВК для абитуриентов: `vk.com/mm_abiturient`
Телеграм-канал для абитуриентов: `t.me/abiturient_mm_msu`

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ НИУ ВШЭ

создан в 2007 г. при участии Независимого Московского Университета для подготовки ведущих специалистов мирового уровня в области чистой математики, ее приложений и математического образования. Лидерские позиции НИУ ВШЭ в области математики отражены в ключевых предметных рейтингах: университет занимает первое место в России в номинации high quality research в предметном рейтинге ARWU.

Отличительная особенность факультета — сочетание глубокой фундаментальной подготовки с возможностью раннего погружения в интересующую область чистой математики или ее приложений. Этой цели служат индивидуальные учебные планы и большой объем персонального взаимодействия преподавателя с каждым студентом, начиная с 1 курса (включая сдачу листочков и курсовые работы), а также вовлечение студентов в активную научную жизнь. На факультете действуют 4 международные лаборатории, специализирующиеся на различных областях математики, 2 проекта фундаментальных исследований, лаборатория математического образования, научно-учебная лаборатория «Сложные сети». Для старшекурсников, ориентированных на приложения, есть возможность участвовать в работе проектно-учебных групп с индустриальными партнерами (Тинькофф, Huawei).

Благодаря такому подходу выпускники, нацеленные на академическую карьеру, поступают в лучшие аспирантуры мира, а остальные неизменно востребованы в IT, финтехе и других наукоемких приложениях.

Помимо программы общего профиля «Математика», на факультете есть программа совместного бакалавриата с Центром педагогического мастерства, нацеленная на подготовку высококвалифицированных преподавателей физико-математических школ.

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК НИУ ВШЭ

создан в 2014 году совместно с компанией «Яндекс». Факультет ведет подготовку специалистов высокого уровня по работе с данными, аналитиков, исследователей в области компьютерных наук и программных инженеров для ведущих ИТ-компаний и исследовательских центров. На факультете реализуется восемь бакалаврских программ, которые привлекают сильнейших абитуриентов страны. Летом 2026 года пройдет первый набор на бакалаврскую программу по робототехнике.

Наряду с отличной фундаментальной подготовкой в области математики и информатики большое внимание уделяется прикладным курсам и проектной работе, построению индивидуальной образовательной траектории. В числе преподавателей — ведущие российские математики и эксперты в области Computer Science, международные специалисты, исследователи из институтов РАН, сотрудники высокотехнологичных компаний, победители олимпиад по спортивному программированию и математике. В 2024 году на программе «Прикладная математике и информатика» открыта специализация ИИ360, в 2026 году на ПМИ откроется уникальный поток М++, все программы бакалавриата охватывает Исследовательская программа ФКН.

Образовательные программы ФКН реализуются совместно со Сбером, Школой анализа данных Яндекса, 1С, Т-Банком, МТС, Альфа-Банком, Авито, Институтом системного программирования имени В.П. Иванникова РАН, Математическим институт имени В.А. Стеклова РАН и другими академическими и индустриальными партнерами. Наши студенты участвуют в фундаментальных и прикладных проектах, побеждают на олимпиадах и хакатонах, проходят стажировки в ведущих научных центрах и компаниях-лидерах ИТ-индустрии.

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ МФТИ,

возглавляемая Андреем Михайловичем Райгородским, — один из ведущих научно-образовательных центров в стране в области фундаментальной и прикладной математики, а также в сфере технологий работы с большими данными и искусственным интеллектом.

ФПМИ готовит лидеров IT-индустрии, аналитиков и исследователей для научной работы и прикладных разработок. Образовательные программы ФПМИ, построенные на стыке математики, компьютерных наук и других областей, актуализируются ежегодно.

Благодаря уникальной системе базовых кафедр Физтеха, фундаментальное образование в ФПМИ сочетается с передовыми научными исследованиями и решениями актуальных задач индустрии. Свобода выбора, которую дает ФПМИ, позволяет студентам выстраивать образовательную траекторию в соответствии со своими интересами.

В число партнеров Физтех-школы входят ведущие научно-исследовательские центры России (ВЦ РАН, AIRI, ИППИ РАН, ИСП РАН и др.) и крупнейшие IT-компании (Яндекс, Сбер, ВК, Т-Банк и др).

В 2024 г. в МФТИ на базе ФПМИ был создан Институт искусственного интеллекта. Его команда, к которой уже присоединились многие студенты ФПМИ, решает амбициозные научные задачи в области ИИ и работает над востребованными в экономике и промышленности интеллектуальными продуктами.

Мощная фундаментальная подготовка, закладываемая на младших курсах, позволяет студентам и выпускникам не упираться в потолок возможностей и решать задачи любой сложности. В ФПМИ наука встречается с индустрией, а идеи становятся реальными инновациями.

Сайт ФПМИ МФТИ: `mipt.ru/education/schools/fpmi`
Вконтакте: `vk.com/abitu`

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК СПбГУ

МКН — самый молодой факультет Санкт-Петербургского университета и один из самых молодых математических факультетов России. Программы бакалавриата («Математика», «Науки о данных», «AI360: Математика машинного обучения», «Современное программирование») и магистратуры («Современная математика», «Разработка программного обеспечения и науки о данных») рассчитаны на сильных и увлечённых студентов (и они это ценят: к нам поступает больше всего международников по математике). Программы динамично меняются, отражая нынешнее бурное развитие математики и компьютерных наук.

При всём этом мы каждый день помним, что наследуем трёхсотлетней традиции петербургской математики, давшей миру столько удивительных открытий и блестящих учёных, корифеев и лауреатов всего. Мы гордимся, что один из них — Станислав Константинович Смирнов — основатель и бессменный научный руководитель факультета.

Помимо интенсивного учебного процесса, основой которого является богатый выбор спецкурсов, на факультете действуют две научные лаборатории по математике (лаборатория Чебышева, из которой и вырос факультет, и лаборатория Вероятностных методов анализа) и лаборатория Искусственного интеллекта имени Маркова. Совместно с друзьями из ПОМИ факультет обеспечивает научную деятельность международного института Эйлера, где работают и многие наши студенты-математики. А студенты-программисты всегда имеют приятный выбор стажировок в лучших компаниях. Успешные студенты всех направлений получают солидные стипендии от наших партнёров.

Факультет расположен в центре Петербурга, на Васильевском острове, где Ростральные колонны, Кунсткамера, Сфинксы и ледокол «Красин», где работал Леонард Эйлер, где родился Георг Кантор, где ждут тебя.

Сайт: `joinmkn.ru`

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru
www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»
www.problems.ru

На сайте www.problems.ru размещаются все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.), Турнира городов и других соревнований, задачи из разных книг. Большинство задач приведено с решениями, есть тематический рубрикатор.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ»
zadachi.mccme.ru

Более 13 000 задач по планиметрии и более 4000 задач по стереометрии с решениями, чертежами, атрибутами для тематического поиска и прослеживания взаимосвязей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ

www.etudes.ru

Проект реализуется в Лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук. В разделе «Этюды» представлены фильмы, выполненные с использованием компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и её приложениях. Раздел «Модели» является электронной энциклопедией наглядных математических моделей и пособий, раскрывающих математические факты и теоремы. В разделе «Игротеки» собираются активности, которые можно проводить в рамках математических мероприятий.

КНИГА «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ»

book.etudes.ru

В сюжетах, собранных в книге, рассказывается как о математической «составляющей» крупнейших достижений цивилизации, так и о математической «начинке» привычных каждодневных вещей. Увлекательный популярно-описательный стиль изложения делает материалы книги доступными для широкого круга читателей.

Книга издана по решению Учёного совета Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук; все авторы — известные учёные.

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЕ ЖУРНАЛЫ В ИНТЕРНЕТЕ

Первые научно-популярные журналы начали выходить в России более двух веков назад. На их статьях выросло не одно поколение российских ученых, инженеров, просто думающих и читающих людей самых разных родов занятий. Сейчас старые номера этих журналов доступны читателям лишь в ничтожном числе библиотек. Электронные архивы призваны сделать их материалы доступными для широкой аудитории.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (1886—1917)

vofem.ru

Журнал, фактически заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год его существования вышло 674 выпуска В.О.Ф.Э.М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое. Среди постоянных рубрик журнала были, например: «Статьи, посвященные вопросам преподавания математики и физики», «Опыты и приборы», «Математические мелочи», «Библиографический отдел».

Статьи составлялись настолько популярно, насколько это возможно без ущерба для научной стороны дела.

ЖУРНАЛ «КВАНТИК» (2012—)

kvantik.com

В журнале вы найдёте статьи и задачи по математике, лингвистике, физике, химии, биологии и другим естественным наукам. Журнал доступен школьникам 5—8 классов, но может быть интересен любознательным читателям любого возраста.

ЖУРНАЛ «КВАНТ»

kvant.digital

Научно-популярный физико-математический журнал «Квант» выходит с 1970 года. Задача нового электронного архива, открытого осенью 2025 года, — представить бесценные по содержанию материалы в современном, удобном для пользователя виде, включая полнотекстовый поиск и использование с мобильных устройств.

Страницы журнала отсканированы заново и представлены в хорошем качестве. Поиск можно осуществлять по распознанным изображениям (раздел «Архив номеров»), по названиям статей и их авторам (разделы «Статьи», «Указатель персоналий»), задачник «Кванта» представлен в разделе «Задачи». В помощь пользователям — создаваемые журнальный и тематический рубрикаторы.

Большинство материалов планируется представить в html-формате, удобном для использования с мобильных устройств и точного поиска. Эта работа невозможна без ручного труда, и к сотрудничеству приглашаются энтузиасты.

СБОРНИКИ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ» (3 сер., 1997—)

www.mccme.ru/free-books/matpros.html

Сборники с таким названием выходили в 1934—38 и 1957—61 годах. Сборники новой серии играют роль связующего звена между специальной и популярной математической литературой. Математическое содержание «должно быть понятно вдумчивому и настойчивому читателю, даже при отсутствии специальной подготовки». Кроме того в сборниках публикуются материалы о математической жизни, материалы по преподаванию математики.

СЕРИИ КНИГ

БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

mccme.ru/mmmf-lectures/books/

Осенью 1999 года Московское математическое общество, Малый мехмат МГУ и Московский центр непрерывного математического образования возобновили популярные лекции по математике для школьников 9–11 классов. В том же году возникла серия небольших брошюр по материалам избранных лекций — вышло более 40 выпусков.

БРОШЮРЫ ЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ «СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

mccme.ru/dubna/books/

написаны по материалам интенсивных мини-курсов, вплотную подводящих студентов и подготовленных старшеклассников к действительно современной математике.

А на странице mccme.ru/dubna/courses/ доступны видеозаписи многих занятий ЛШСМ.

«ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

ashap.info/Knigi/Matkruzhki/

Главный адресат серии — школьный учитель математики, который понимает, что для пробуждения интереса к математике и для развития учеников школьных уроков часто не хватает. Но брошюры могут быть интересны и полезны и школьникам.

В брошюру по каждой теме входят разработки нескольких занятий с изложением необходимой теории, разобранными примерами, задачами (к ним приводятся подробные решения) и методическими указаниями. Изложение каждой темы начинается практически «с нуля» или, во всяком случае, там, где заканчиваются стандартные школьные учебники.

Двадцать пятая летняя школа
«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
имени Виталия Арнольда

для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс) пройдет с 19 по 30 июля 2026 года на базе Кочубей-центра в Царском Селе.

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, заполните до 20 мая анкету участника.

Материалы прошедших школ и информацию о ЛШСМ-2026 смотрите на сайте

www.mccme.ru/dubna

Контактный e-mail оргкомитета dubna@mccme.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXXIX Московская математическая олимпиада
Задачи и решения

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11
Тел. (499) 241-08-04