

## ММО-2026, 9 класс, критерии проверки

**Задача 1.** Алиса записала положительные числа  $a, b, c, d, e$  (не обязательно целые), а Маруся — числа  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ . Оказалось, что сумма чисел Алисы больше суммы чисел Маруси. Могло ли произведение чисел Алисы оказаться меньше произведения чисел Маруси?

*Критерии*

- + Верные пример и его обоснование.
- + Верный пример, в его обосновании есть незначительные арифметические ошибки.
- Только верный ответ.

**Задача 2.** Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . На его описанной окружности отмечена точка  $D$ , диаметрально противоположная вершине  $A$ . Точки  $X$  и  $Y$  на стороне  $BC$  таковы, что  $BX = XD$  и  $CY = YD$  (точка  $X$  лежит на отрезке  $BY$ ). Докажите, что  $DA$  — биссектриса угла  $XDY$ .

*Критерии*

- Счётное решение, не доведённое до конца.

**Задача 3.** На столе лежат 11 арбузов массами 1, 2, 3, ..., 11 кг. Алёна и Богдан раскладывают арбузы в четыре пакета; каждый пакет выдерживает 14 кг, а от большего веса рвётся. Они по очереди выбирают арбуз со стола и кладут его в любой из пакетов так, чтобы пакет не порвался. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Алёна. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл другой?

*Критерии*

- + Приведена выигрышная стратегия Алёны и доказано, что она работает.
- + Приведена выигрышная стратегия Алёны, но доказательство, что стратегия работает, отсутствует или неверно.
- $\geq \pm$  Указано, что Алёна первым ходом выбирает арбуз массой 1 кг, и явно приведено разбиение остальных арбузов на пары с суммой 13 кг.
- $\mp$  Указано, что Алёна первым ходом выбирает арбуз 1 кг; есть идея дополнения до фиксированной суммы, но корректная стратегия не описана (например, стратегия описана как «будем дополнять до 13 или 14 кг», но не указано, как именно это делать).
- Только верный ответ.

**Задача 4.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  стороны  $AB$  и  $BC$  равны,  $K$  — точка пересечения диагоналей. Описанная окружность треугольника  $ABD$  повторно пересекает сторону  $BC$  в точке  $Y$ , а описанная окружность треугольника  $BCD$  повторно пересекает сторону  $AB$  в точке  $X$ . Докажите, что  $\angle AKX = \angle CKY$ .

*Критерии*

- Счётное решение, не доведённое до конца.

**Задача 5.** Существует ли бесконечное множество  $S$ , состоящее из квадратов натуральных чисел, такое, что для любых двух различных  $x$  и  $y$  из  $S$  найдётся  $z$  из  $S$  (возможно, совпадающее с  $x$  или  $y$ ), для которого  $x + y + z$  — квадрат натурального числа?

*Критерии*

- $\geq \pm$  Приведён верный пример и указано, как для всех  $x$  и  $y$  выбрать подходящее  $z$ .
- Приведён верный пример, но отсутствует обоснование, почему он подходит.
- Только верный ответ.

**Задача 6.** В гостинице  $a > 1$  этажей, на каждом этаже  $b$  одноместных номеров. На математический конгресс приехало  $ab$  математиков. Оказалось, что каждому математику на каждом этаже нравится ровно один номер. Докажите, что число способов поселить всех математиков в гостиницу так, чтобы каждому нравился его номер, чётно.

*Критерии*

- + Любое верное решение задачи.
- $\geq \pm$  В решении есть всё перечисленное:
  - указано, что для каждого расселения внутри фиксированной пары этажей есть цикл из номеров, соседние номера в котором нравятся одному и тому же математику (или аналогичный цикл из математиков, или цикл в двудольном графе из номеров и математиков);
  - указано, что в этом цикле есть два способа расселения (т. е. что можно переселить математиков по кругу);
  - указано, что таким образом устанавливается соответствие между расселениями, разбивающие их на пары.

При этом оценка может быть снижена до  $\pm$  при наличии недочетов или пробелов в обосновании в остальной части решения. Например:

- нет однозначного выбора цикла для каждого расселения (из которого бы следовало, что соответствие взаимно);

- нет доказательства, что для каждого расселения и фиксированной пары этажей такой цикл найдётся; или это доказательство неверно.
- ⊕ Задача сведена к случаю 2 этажей, других продвижений нет.
- ⊕ Есть идея для каждого расселения найти цикл и переселять математиков по циклу, но допущены серьёзные ошибки или она не доводится в таком виде. Например:
- неверно указано, что математиков можно переставлять по циклу любыми способами, а не только двумя;
  - не фиксирована пара этажей, по которой нужно строить цикл (и нет указания на то, как однозначно выбрать цикл, чтобы соответствие было взаимным);
  - вместо разбиения на пары происходит что-то другое (например, рассматриваются другие циклы, другие пары этажей, выделяются группы непонятной структуры из более чем двух расселений).
- Есть идея найти цикл и переселять математиков по циклу, чтобы построить соответствие, но её реализация далека от верной. Например:
- неверно указано, что найдутся пары математиков, которых можно поменять (т. е. рассматриваются только циклы длины 2);
  - цикл найден при рассмотрении общей конфигурации того, какие номера кому нравятся, в отрыве от конкретного расселения; неясно, почему в конкретном расселении математики из этого цикла все будут жить в номерах из цикла (чтобы их можно было переселить).