

Задача 1. Дан остроугольный треугольник ABC . На его описанной окружности отмечена точка D , диаметрально противоположная вершине A . Точки X и Y на стороне BC таковы, что $BX = XD$ и $CY = YD$ (точка X лежит на отрезке BY). Докажите, что DA — биссектриса угла XDY .

Задача 2. Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами a , b и c , имеющее целый корень. Может ли оказаться, что если увеличить любой из этих трёх коэффициентов на 1, то полученное уравнение останется квадратным и также будет иметь целый корень?

Задача 3. Имеется двести шариков ста цветов, по два шарика каждого цвета. Фокусник разложил их произвольным образом в сто коробочек, по два шарика в коробочку, где что лежит — игрок не знает. За ход игрок указывает на любые две коробочки, после чего фокусник незаметно для игрока выбирает по шарiku из этих коробочек и меняет их местами. Если в какой-то момент в каждой коробочке будут лежать разноцветные шарики, ведущий выдаёт игроку приз. Может ли игрок действовать так, чтобы гарантированно получить приз, как бы фокусник ни менял шарики?

Задача 4. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что $BD = DE = CE$. На отрезках AB , AC , AE и AD выбраны точки L , K , P и Q (все точки $A, B, C, D, E, K, L, P, Q$ различные) соответственно так, что

$$\angle EAD = \angle PDE = \angle QED = \angle AKP = \angle ALQ.$$

Докажите, что $LK + DE \leq AD + AE$.

Задача 5. Назовём набор из k последовательных натуральных чисел *хорошим*, если можно у каждого из этих чисел выбрать по простому делителю так, чтобы у всяких двух разных чисел были выбраны разные делители. В противном случае назовём набор *плохим*. При всяком ли натуральном k количество плохих наборов из k последовательных натуральных чисел конечно?

Задача 6. Дано натуральное $n \geq 2$. Симметрический многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ таков, что уравнение $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ имеет вещественные решения, причём все эти решения получаются перестановкой чисел из одного-единственного набора a_1, \dots, a_n . Известно, что в этом наборе есть хотя бы два различных числа. Для каждого $n \geq 2$ найдите наименьшую возможную степень многочлена P .

Многочлен называется симметрическим, если он не меняется при любой перестановке своих переменных. Степенью многочлена P от нескольких переменных называется наибольшая из сумм показателей степеней переменных в ненулевых слагаемых (одночленах) многочлена P , записанного в стандартном виде. Например, у многочлена $P(x, y) = x^3y^3 + xy^4 + x^4y$ степень равна 6 (так как $3 + 3 = 6$, а это больше, чем $4 + 1 = 5$).

XXIII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 12 апреля.

Подробности — на странице olympiads.mcsme.ru/ustn/

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXIX Московской математической олимпиады —
на сайте mmo.mcsme.ru