НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

Ковальджи

МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ 60 ЛЕТ СПУСТЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНП

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ
НАРОДОХОЗЯЙСТВЕННОГО
ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ 60 ЛЕТ СПУСТЯ

Под редакцией

Ю.С.Ильяшенко, В.М.Тихомирова

Москва

ИПП РАН

1997 г.

Составители: А.Я.Канель-Белов, А.К.Ковальджи
Московские математические олимпиады 60 лет спустя.
М.: ИНП РАН, 1997. - 128 с.

В этой книге впервые собраны задачи московских математических олимпиад разных уровней - от школьных до отборочных на Всероссийскую (1993—1995 гг.). Приведены подробные решения 1993 г. — начиная с интуитивных соображений и кончая их оформлением. Особый интерес представляют комментарии, в которых отражено происхождение задач и их связь с "большой математикой". Для самостоятельной подготовки выделены ключевые идеи решений вместе с подборками задач к ним.

Книга адресована школьникам 5—11 классов, начинающим олимпиадникам и "профессионалам", а также руководителям кружков, факультативов и всем любителям математики.

СОДЕРЖАНИЕ

Об олимпиадах 1993 года		4
Об олимпиадах 1994—1995 годов		9
Советы читателю		12
	Задачи	Решение
Математический праздник 1993 года	16	18
LVI Московская математическая олимпиада		
Школьный тур	22	23
Окружной тур	24	26
Городской тур	30	33
Отбор на Всероссийскую олимпиаду 1993 года	54	56
LVII Московская математическая олимпиада		
Математический праздник	65	66
Школьный тур	68	70
Окружной тур	71	73
Городской тур	76	79
Отбор на Всероссийскую олимпиаду 1994 года	87	89
LVIII Московская математическая олимпиада		
Математический праздник	98	99
Школьный тур	101	102
Окружной тур	104	106
Городской тур	108	111
Отбор на Всероссийскую олимпиаду 1995 года	120	122

ОБ ОЛИМПИАДАХ 1993 ГОДА

Немного истории

Первые соревнования по математике возникли в конце прошлого века — в Румынии (1889 г.) и Австро-Венгрии (1894 г.). Поначалу это были предметные состязания выпускников гимназий. Но они сразу же обнаружили поразительную свою особенность — выявлять людей особой, высшей одаренности. Так, победителями венгерских олимпиад были такие замечательные ученые, как Л.Фейер, Т.фон Карман, А.Хаар, М.Рисс, Т.Сеге и другие. И идея олимпиад для школьников охватывала все новые и новые страны.

В России первая олимпиада состоялась в Ленинграде в 1934 г., а уже через год прошла I Московская математическая олимпиада. Ей была посвящена брошюра (Р.Н.Бончковский. Московские математические олимпиады 1935 и 1936 гг. ОНТП НКТП СССР, 1936).

В оргкомитет первой олимпиады вошли будущие академики П.С.Александров (председатель), А.Н.Колмогоров и С.Л.Соболев, будущие члены-корреспонденты Л.Г.Шнирельман и Л.А.Люстерник, профессора Н.А.Глаголев, В.Ф.Каган, А.Г.Курош, Л.А.Тумаркин, Н.Ф.Четверухин, С.А.Яновская, известные деятели просвещения М.Ф.Берг, Е.С.Березанская (автор учебника по арифметике), А.Р.Эйгес (школьный учитель П.С.Александрова).

По предложению А.Н.Колмогорова — в соответствии с его идеями о трех типах математической одаренности (геометрической, алгоритмической и комбинаторно-логической) — были предложены три серии задач: по геометрии, алгебре и комбинаторике. Каждый из решавших должен был выбрать по одной задаче из каждой серии.

Авторы данного предисловия в 50-е годы тоже были участниками олимпиад. Олимпиады «наших» лет были праздником в честь нашей Науки и нашего Университета. Именно там, на олимпиадах, рождалась уверенность в том, что мехмат является лучшим математическим вузом мира (что соответствовало истине в те годы). В моменты присуждения премий за столом президиума или на популярных лекциях по математике мы видели выдающихся ученых — П.С.Александрова, И.М.Гельфанда, А.О.Гельфонда, Б.Н.Делоне, А.Н.Колмогорова и многих других. Все это незабываемо.

Об истории первых 27 математических олимпиад, о замечательных традициях этого периода вдохновенно рассказано в статье В.Г.Болтянского и И.М.Яглома, опубликованной в книжке «Сборник задач Московских математических олимпиад» (М., Просвещение, 1965, составитель А.А.Леман), и мы советуем каждому прочесть эту статью.

В 1986 г. вышла книга Г.А.Гальперина и А.К.Толпыго «Московские математические олимпиады» (М.,Просвещение,1986), где подводились итоги 50-летнего развития олимпиадного движения в Москве. Она вышла тиражом в 680 тыс.экземпляров (!) (сопоставимым с тиражом всех математических монографий, вышедших за те же 50 лет) и ныне стала библиографической редкостью.

Успехи московских олимпиад повлияли на то, что само олимпиадное движение приняло всероссийские, а потом и всесоюзные масштабы. Весной 1960 г. состоялась Московская олимпиада с участием школьников из других городов, в 1961 г. — первая Всероссийская, а в 1967 г. — первая Всесоюзная олимпиада.

С 1959 года регулярно проводятся Международные математические олимпиады.

Организация олимпиады

Осенью 1992 г. был сформирован оргкомитет (председатель академик А.Т.Фоменко). Составлением задач занималась методическая комиссия (председатель Ю.С.Ильяшенко). Проверкой работ и награждением занималось жюри (председатель В.М.Тихомиров).

В марте 1993 г. состоялась LVI Московская математическая олимпиада. Ее готовили многие ветераны математического олимпиадного движения, математическая общественность Москвы и других городов и почти все организации, заинтересованные в развитии математического образования. В их числе: Московское математическое общество, Департамент образования, механико-математический факультет МГУ, Малый мехмат МГУ, Международный турнир городов, Центр научных соревнований молодежи, Московский институт повышения квалификации работников образования (МИПКРО), Дом научно-технического творчества молодежи.

Олимпиада в 1993 г. была хорошо организована, обеспечена аудиториями и издательскими материалами, в чем немалая заслуга сотрудников мехмата. На проведение олимпиады были выделены средства — мехматом, МИПКРО, фондом «Promathematica» (Франция).

Авторы задач

В проведении олимпиады участвовали победители олимпиад прошлых лет. Многие из них демонстрируют исключительные способности в «математическом композиторстве» — сочинении интересных и ярких задач. Их фамилии вы неоднократно встретите на страницах этой книги.

Быть может, следует подумать, как поддерживать и поощрять такую замечательную интеллектуальную одаренность (вспомним, как это делают шахматисты: они проводят конкурсы, публикуют этюды, двух-, трех- и многоходовки в разных изданиях с указанием фамилий авторов и т.п.).

Необходимо упомянуть о возрождении в 1993 г. доброй старой традиции — издании перед олимпиадой сборника «подготовительных задач». В середине 70-х годов эта традиция была прервана, а в этом году (усилиями, в основном, Н.Н.Константинова) традиция возродилась: тиражом 10 тыс. экз. вышла брошюра «Московская математическая олимпиада 1993 года. Подготовительные задачи» (М.,Независимый университет, 1993), которая раздавалась бесплатно участникам окружной олимпиады.

Школьный и окружной туры

Организацией этих олимпиад занимался Московский институт повышения квалификации работников образования (МИПКРО).

Школьный тур появится только для 5—7 классов. Всего в школьном туре 1993 г. участвовали 25 тыс. школьников, а победителями стали 6 тыс.

Окружной тур проводится только для 8—11 классов. В 1993 г. в окружном туре участвовали 7 тыс. школьников, а победителями стали 900.

Математический праздник

В промежутке между окружным и городским турами проходила олимпиада для младших школьников, организованная Малым мехматом; в ней участвовали около 750 школьников. Расскажем об этом замечательном начинании.

В 1990 г. группа студентов и аспирантов мехмата провела математический праздник для школьников 5–7 классов, для которых не проводится городская олимпиада.

С тех пор математический праздник проводится ежегодно по такому сценарию. Дети собираются в МГУ и два часа (на первых олимпиадах – три) пишут работу. После этого их ждет культурная программа (включавшая в разные годы лекции, симфонический концерт и, непременно, мультипликационные фильмы). В это время идет проверка работ, а с родителями ведутся беседы о кружках, олимпиадах и математических школах. В заключение проводится разбор задач и награждение победителей.

Было бы замечательно, если бы не угасло такое прекрасное дело.

Отбор на Всероссийскую олимпиаду

Наряду с официальными московскими олимпиадами мы включили в сборник и задачи отбора на Всероссийскую олимпиаду, по результатам которого формируется команда Москвы. На него приглашаются 40 – 50 лучших участников городского тура.

Немного статистики

Интересно проследить за эволюцией числа участников московских олимпиад. В первой олимпиаде 1935 г. приняло участие 314 человек. В довоенные годы цифра держалась в пределах 600. В 40–50-е годы число участников росло, но находилось в пределах 1000. На XXI олимпиаде произошел скачок до 1200 участников (на предыдущей было 700), а затем, в 60-е годы – пик олимпиадного движения, когда приходило свыше 4000 школьников. Затем наступает откат. К концу 70-х годов число участников падает до 1000, затем ниже. В 1992 г. участвовало около 800 школьников. Так что 1500 школьников в 1993 г. можно считать некоторым достижением.

Интересно было бы проанализировать причины подъемов и спадов числа участников.

Роль олимпиад

Олимпиады служат хорошим индикатором уровня математического образования. В частности, эта олимпиада выявила падение геометрической культуры учащихся. Напомним, что в каждом классе были геометрические задачи. Кроме задачи 11 класса, действительно трудной, но очень красивой (нам хотелось привлечь к ней внимание, и мы сознательно шли на риск), остальные геометрические задачи были достаточно школьными. Но решали их плохо: в 8 классе вовсе не было решений (отчасти по нашей вине, поскольку тема «вписанные углы» не во всех школах была пройдена), в 9-м — два решения, в 10-м — около десяти и в 11-м — снова ни одного (хотя это и ожидалось).

Эти результаты требуют осмысления. Почему даже сильные кружковцы и матшкольники не решили «геометрию»? Казалось бы, олимпиадная подготовка должна была им помочь? А ведь именно геометрия прекрасно развивает нестандартное мышление и выделяет людей, способных заниматься математикой.

Отдельная тема, — в какой мере олимпиады могут выявлять таланты и высшие дарования. Безусловно, система олимпиад отчасти выполняет эту роль. Победители олимпиад нередко становятся крупными, замечательными учеными, к которым приходит мировое признание.

И вместе с тем выдвигались десятки, даже сотни юношей и девушек, демонстрировавших поразительную «олимпиадную» одаренность, но которым, возможно, «олимпиадный профессионализм» помешал в развитии. Один из крупнейших математиков нашего времени Израиль Моисеевич Гельфанд как-то сказал: «Математика — это марафон». И действительно, достижение высоких целей (не только в математике), как правило, сопряжено с огромным, длящимся годы и годы упорным трудом в поиске решения трудной проблемы, или построении новой теории, или создании нового метода. И здесь не всегда полезны навыки олимпиадного спринта.

На наш взгляд, и в олимпиадах, и в математическом просвещении должны бы занять большее место идеи и методы «живой» науки. При этом разумно значительно больше привлекать к составлению задач школьных учителей и специалистов по прикладной математике.

Ю.С.Ильяшенко, В.М.Тихомиров

ОБ ОЛИМПИАДАХ 1994 — 1995 ГОДОВ

В 1994 г. городская олимпиада расширилась — ее частью стал Математический праздник для 6–7 классов. На него пришло примерно 500 школьников, а на городскую олимпиаду старшеклассников более 1500 (примерно поровну в каждом классе).

Олимпиады 1994, 1995 гг. проводились под эгидой Московского математического общества. Председателем Оргкомитета LVII олимпиады 1994 года был Н.Х.Розов, председателем методической комиссии и жюри — Н.Б.Васильев. По предложению Н.Х.Розова жюри учредило специальный «приз имени Делоне» за решение самой трудной геометрической задачи — в память о замечательном математике, инициаторе первой ленинградской олимпиады, проходившей ровно 60 лет назад, Борисе Николаевиче Делоне. Этот приз присудили единственному участнику, решившему задачу №5 о хорде, делящей площадь многоугольника, ученику 10 класса 57-й школы М.Островскому.

По традиции московские математические олимпиады являются «открытыми». На них приглашаются все желающие. На олимпиаду 1994 г. приехали (и довольно успешно выступили) гости из нескольких городов, — не только подмосковных, но также Ижевска, Нальчика, Нижнего Новгорода.

Все участники получили Сборники подготовительных задач (составители А.Я.Канель-Белов, А.К.Ковальджи и Н.Б.Васильев), в котором представлены задачи олимпиадного фольклора (чаще других разбираемые на кружках и факультативах).

На торжественном закрытии участников приветствовал ректор МГУ В.А.Садовничий, агитировавший их поступать в наш прославленный университет. Профессор мехмата академик О.А.Олейник рассказала о математических кружках времен ее юности. Поздравили победителей и представители спонсоров олимпиады. (В их число входили Московский институт развития образовательных систем (МИРОС), Промстройбанк, журнал «Дифференциальные уравнения», школа «Авангард», некоторые московские математики, работающие за рубежом.)

Н.Н.Константинов пригласил победителей на летнюю школу-конференцию Международного математического Турнира городов (его весенний тур проводится во многих городах разных стран одновременно с Московской олимпиадой и частично по тем же задачам).

Олимпиада 1995 года для Москвы была юбилейной — ведь первая московская олимпиада прошла в 1935 году. Работу методической комиссии возглавляли Ю.С.Ильяшенко и А.А.Разборов (в прошлом — один из победителей московских, всесоюзных и международных олимпиад), работу Оргкомитета академик Д.В.Аносов (тоже в прошлом победитель Московской олимпиады) и профессор А.Г.Костюченко, а председателем жюри стал ветеран московских кружков, математических школ и олимпиад Н.Н.Константинов.

В этом году одним из спонсоров олимпиады был фонд Сороса. В частности, при его участии был издан сборник задач для 5—7 классов (подготовленный С.А.Дориченко и И.В.Ященко), отражающий опыт работы кружков при Малом мехмате МГУ.

Ко дню олимпиады оргкомитету удалось напечатать тексты задач вместе с краткими решениями и сразу после окончания работы раздать их всем пришедшим на олимпиаду; но это, видимо, повлияло на число пришедших через неделю на разбор задач и награждение — оно было сравнительно небольшим. Может быть, не стоило лишать участников удовольствия самим подумать над задачами: ведь больше всего нравятся и запоминаются те задачи, которые решил сам. Лучше было раздать сборник на закрытии, добавив туда итоги олимпиады.

В заключение — несколько замечаний о задачах этих олимпиад.

В идеале, каждая олимпиадная задача — это произведение искусства, представляющее красивую идею разнообразного мира математики. Постоянная дилемма для составителей: с одной стороны, не повторяться, с другой — предложить хоть один «шедевр» в каждом классе.

Но, кроме того, олимпиада — это игра, соревнование, и творцы задач должны заботиться: реально ли решить вариант за несколько часов, хотя бы «чемпионам»; не будет ли велико преимущество у тех, кто изучил высшую математику; получат ли удовольствие те, кто пришел на олимпиаду впервые...

В целом, варианты олимпиады 1994 и 1995 оказались удачными.

В 1994 г. в 8 и в 10 классе участники вполне успешно справились не только с первыми, «утешительными», но и с самыми сложными задачами. В 11 классе претендентов на «приз имени Делоне» не оказалось: в задаче №5 (про биссектрисы) никто не догадался, что за сложной конфигурацией скрыто элегантное рассуждение с линейными функциями на плоскости. Зато самую трудную, по мнению жюри, задачу (по теории чисел) сделали трое одиннадцатиклассников. А задача о вишенке в бокале оказалась удачной и почти утешительной — ее решили более трети участников. Дело в том, что она требует лишь грамотного применения техники, знакомой и «обычному» школьнику.

Похуже были результаты в 9 классе. Многие пытались решить заманчивую задачу про «морской бой», казалось бы, естественным путем — оценивая площадь, занятую поставленными кораблями (вместе с соседними клетками) — но он оказался тупиковым. И им не хватило времени на задачу о многозначном числе, не представлявшую особых идейных трудностей, но требующую довольно аккуратного перебора, оценок и выкладок — ее также никто не решил. В итоге 9-классники остались без первых премий.

На олимпиаде 1995 г. в 8, 9 и 10 классе все задачи были решены. Но в 10 классе школьная на вид задача 1 (о синусах) почему-то решалась плохо.

Перед началом олимпиады 11-классникам сообщалось, что последние три задачи — особенно трудные, и жюри будет считать работу удачной, если решена хотя бы одна из них. Но все же сверхтрудную задачу 6 (по теории чисел) никто не решил.

Наибольшие проблемы у составителей вариантов в последние годы возникают с подбором первых, более простых задач. Это относится и к окружным олимпиадам.

Хорошо бы перенять опыт Петербурга, где разбор задач наиболее массового окружного тура передается по телевидению. Ведь сейчас на городской тур — хоть он открыт для всех — приходят ученики лишь из нескольких десятков московских школ, а полторы тысячи участников составляют лишь один процент старшеклассников.

Еще одна прекрасная традиция — популярные лекции известных математиков для школьников и учителей — начала возрождаться в Москве в 1994 году: несколько таких лекций состоялось в МГУ и в 45-й средней школе.

Но, конечно, главное, чтобы и задачи, и олимпиада в целом приносили радость и пользу не только победителям, но и всем участникам. Ведь для их дальнейших успехов куда важнее не победа на олимпиаде, а заинтересованное и творческое отношение к своей работе.

Н.Б.Васильев

СОВЕТЫ ЧИТАТЕЛЮ

Работа со сборником

Настоящую задачу, в отличие от упражнений, нужно сначала исследовать, чтобы отыскать хотя бы подход к решению. Поэтому начинайте с задач полегче. И решайте не все подряд, а выбирайте интересные.

Если задача не решается, попробуйте придумать и решить более простую похожую задачу. Если и тогда не решается, прочтите указание. А если ничего не выходит, то читайте решение как детектив, пытаясь угадать следующий ход мысли.

Посмотрите на прочитанное решение в целом: как оно устроено, какие идеи в нем «работают» и, главное, поймите, как можно до этого додуматься.

Если вам удалось решить задачу, посмотрите ее решение в сборнике, потому что разные решения интересно сравнивать (даже когда одно из них неверное).

Чтобы понять решение глубже, задайте себе вопросы: в каких местах решения использованы те или иные данные? Перестанет ли утверждение быть верным, если какое-то условие убрать или ослабить? Верна ли «обратная теорема»?

Важно не количество решенных задач, а качество их проработки, то новое, что удалось понять.

Увлечение математикой часто начинается с размышлений над одной особенно понравившейся задачей. Именно увлеченность — характерная черта настоящих ученых. Поэтому не подходите к решению задач слишком практично, и не спешите, как турист в Третьяковской галерее, осмотреть все картины за день. Лучше постоять у одной из них подольше.

На олимпиаде

1. Прочитайте все задачи и наметьте, в каком порядке вы будете их решать. Помните, что последние задачи обычно более трудные.

2. Если задача решилась слишком легко, то, скорее всего, вы не поняли условие или где-то ошиблись.

3. Если задача не решается — попробуйте упростить ее условие (взять меньшие числа, рассмотреть частные случаи и т.д) или порешать ее «с конца», «от противного», поставить вместо чисел переменные и т.д.

4. Если Вам не ясно, верно ли некоторое утверждение — попытайтесь его поочередно то доказывать, то опровергать.

5. Не зацикливайтесь на одной задаче: иногда отрывайтесь от нее и оценивайте положение. Если есть хоть небольшие успехи, то можно продолжать, а если мысль ходит по кругу, то задачу лучше оставить (хотя бы на время).

6. Если почувствовали усталость — сразу отдыхайте (смотрите на облака или пройдитесь по коридору).

7. Решив задачу, сразу оформляйте решение. Это поможет проверить рассуждения и освободить мысли для других задач.

8. Каждый переход мысли надо формулировать, даже если он кажется очевидным. Удобно записывать решение в виде нескольких утверждений (лемм).

9. Перед тем как сдать работу, перечитайте ее глазами проверяющих: поймут ли они что-нибудь?

О проверке решений

Проверка работ на олимпиаде отличается от проверки контрольных. В школе внимание учителя сосредоточено на недостатках, ибо это помогает отработать некие навыки и довести их до автоматизма. На олимпиаде цель другая — выявить позитивные идеи, найти думающих школьников, и потому внимание проверяющего сосредоточено на продуктивности идей автора, а описки и даже ошибки прощаются (тем более, что многие школьники не умеют четко выражать свои мысли). Был случай, когда специальный приз был присужден за самую красивую ошибку, которую жюри долгое время не могло обнаружить (решение казалось очевидным, но ответ получался неверным).

В соответствии с целями проведения олимпиады строится и система оценок. Традиционными стали следующие оценки:

«+» — найдены все ключевые идеи, и они достаточно обоснованы, либо из контекста ясно, что автор понимает, как их обосновать. (Иногда жюри спорит до хрипоты: есть решение у школьника, или у него только идея решения.)

«±» — задача решена, но чего-то не хватает, или пропущен этап в решении, или утверждение плохо обосновано, или есть неясность в рассуждениях.

«+/2» — (ставится редко) означает, что либо найдена основная идея, но она не обоснована, либо найдена «половина» идей, необходимых для решения.

«∓» — есть мысли в правильном направлении, но не более того.

«—» — что-то написано, но нет ничего содержательного.

«0» — нет записей по решению задачи.

«!» — в работе есть оригинальные идеи. Возможна оценка «—!».

Обозначения, которые встречаются в тексте

$[a]$ — целая часть числа — наибольшее целое число, не превосходящее данного. Например: $[1,9]=1$, $[-0,3]=-1$, $[5]=5$.

$\{a\}$ — дробная часть числа — разность между числом и его целой частью (всегда неотрицательная). Например: $\{1,9\}=0,9$, $\{-0,3\}=0,7$, $\{5\}=0$.

НОД(m,n) — наибольший общий делитель.

НОК(m,n) — наименьшее общее кратное.

$\Rightarrow$ — следует, вытекает, влечет за собой (например, $a=1 \Rightarrow a^2=1$).

$\Leftarrow$ — следует из, так как, поскольку ($a^2=1 \Leftarrow a=1$).

$\Leftrightarrow$ — равносильно, эквивалентно, необходимо и достаточно, тогда и только тогда, если и только если ($a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0$ и $b=0$).

$\max(a,b)$ — максимум — наибольшее из двух чисел a и b.

$\min(a,b)$ — минимум — наименьшее из двух чисел a и b.

$n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ — факториал (соглашение: $0! = 1$).

$\overline{abc}$ — десятичная запись числа (a,b,c — цифры, $\overline{abc}=100a+10b+c$).

$[a,b]$ — отрезок числовой прямой (концы ему принадлежат).

(a,b) — интервал числовой прямой (концы не принадлежат).

$(a,b]$ или $[a,b)$ — полуинтервал.

$f([a,b])$ — множество значений функции на отрезке $[a,b]$.

ΔABC — треугольник с вершинами A,B,C.

$\angle A$ — угол A.

$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел: 1, 2, 3,...

$\sum_{i=1}^{100} a_ib_ic_i$ — сумма $a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\ldots+a_{100}b_{100}c_{100}$.

$f\circ g\circ h(x)=f\big(g(h(x))\big)$ — композиция функций.

$+\infty$ — символ бесконечности, для которого по определению верно отношение $x < +\infty$ при любом действительном числе x.

(1) — формула или выражение, помеченное данным символом. (Например, если встретилась строка: «$a^2 + b^2 = c^2$ (1)», то формула считается помеченной, а через несколько строк может быть написано: «Из формулы (1) следует, что ...»)

см. — смотрите.

рис. — рисунок.

т.е. — то есть.

... — и т.д. — и так далее.

—»— — то же самое, что было в предыдущей строке.

* — задача труднее остальных.

8-3 — задача для 8 класса под номером 3.

А.К.Ковальджи, А.Я.Канель-Белов

Благодарности

Большой вклад в написание и редактирование этой книги внесли: Д.Ботин, А.Буфетов, Н.Васильев, М.Вялый, А.Галочкин, С.Дориченко, Ю.Ильяшенко, Г.Кондаков, А.Маслов, С.Маркелов, В.Сендеров, А.Спивак, В.Тихомиров, Р.Федоров, Г.Челноков, И.Шарыгин, И.Ященко.

Много ценных замечаний высказали: А.Артемьев, Ю.Бурман, А.Егоров, Н.Константинов, А.Ошмян, Ю.Раскин, Б.Френкин.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК 1993 ГОДА

6 класс

6-1. Инопланетянин со звезды Тау Кита, прилетев на Землю в понедельник, воскликнул: «А!». Во вторник он воскликнул: «АУ!», в среду — «АУУА!», в четверг — «АУУАУААУ!». Что он воскликнет в субботу?

6-2. Мосметрострой нанял двух землекопов для рытья туннеля. Один из них копает вдвое быстрее другого, а платят им одинаково за каждый час работы. Есть два варианта работы: копать с двух сторон до встречи или копать каждому половину туннеля. Какой вариант обойдется дешевле?

6-3. **а)** Как из семи уголков, каждый из которых склеен из трех кубиков $1\times1\times1$, и шести отдельных кубиков $1\times1\times1$ составить куб $3\times3\times3$? **б)** Можно ли это сделать так, чтобы все отдельные кубики оказались в серединах граней большого куба?

6-4*. Если у числа x подсчитать сумму цифр и с полученным числом повторить это еще 2 раза, то получится три новых числа. Найдите самое маленькое x, для которого все четыре числа различны, а последнее из них равно 2.

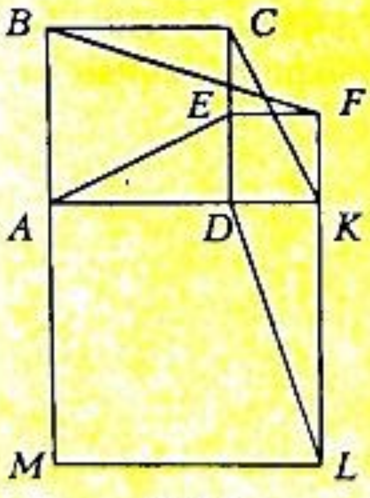


Рис. 1

6-5. Дядя Федор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин сидят на скамейке. Если Шарик, сидящий справа от всех, сядет между дядей Федором и котом, то кот станет крайним слева. В каком порядке они сидят?

6-6. Квадрат $ABCD$ со стороной 2 и квадрат $DEFK$ со стороной 1 стоят рядом на верхней стороне AK квадрата $AKLM$ со стороной 3. Между парами точек A и E, B и F, C и K, D и L натянуты паутинки. Паук поднимается снизу вверх по маршруту $AEFB$ и спускается по маршруту $CKDL$ (рис. 1). Какой маршрут короче?

6-7*. Али-Баба стоит с большим мешком монет в углу пустой прямоугольной пещеры размером $m\times n$ клеток, раскрашенных

…ом порядке. Из любой клетки он может сделать шаг в …у из четырех соседних клеток. При этом он должен либо положить 1 монету в этой клетке, либо взять из нее 1 монету, если, конечно, монеты там есть. Может ли Али-Баба так гулять по пещере, чтобы на черных клетках оказалось ровно по одной монете, а на белых клетках монет не было?

6-8*. В спортклубе тренируются 100 толстяков, вес которых в пределах от 1 до 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно всегда разделить так, чтобы ни в одной команде не было двух толстяков, один из которых весит вдвое больше другого?

Задачи предложили: А.Спивак (1,4,8), Д.Ботин (2,3,6), Е.Иванова (5), С.Токарев (7)

7 класс

7-1. Можно ли в центры клеток шахматной доски 8×8 вбить 16 гвоздей так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

7-2. Зная, что число 1993 простое, выясните, существуют ли натуральные числа x и y такие, что:

а) $x^2 - y^2 = 1993$, б) $x^3 - y^3 = 1993$, в) $x^4 - y^4 = 1993$.

7-3. Решите уравнение

$$1993 = 1 + 8:(1 + 8:(1 - 8:(1 + 4:(1 - 4:(1 - 8x))))).$$

7-4.* В результате измерения четырех сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника получились числа: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна длина измеренной диагонали?

7-5. Гулливер попал в страну лилипутов, имея 7 000 000 рублей. На все деньги он сразу купил кефир в бутылках по цене 7 рублей за штуку (пустая бутылка стоила в то время 1 рубль). Выпив весь кефир, он сдал бутылки и на все вырученные деньги сразу купил кефир. Затем он снова выпил весь кефир, сдал бутылки и на все вырученные деньги снова купил кефир и т.д. При этом между каждыми двумя посещениями магазина стоимость кефира и стоимость пустой бутылки возрастали в 2 раза. Сколько бутылок кефира выпил Гулливер? (Гулливер сдавал столько бутылок, сколько мог купить кефира, а оставшиеся бутылки приберегал на следующий раз.)

7-6. Из куба $3 \times 3 \times 3$ удалили центральный кубик и восемь угловых кубиков. Можно ли оставшуюся фигуру из 18 кубиков составить из шести брусков размером $3 \times 1 \times 1$?

Задачи предложили: А.Спивак (1,3), И.Ященко (2), И.Шарыгин (4), Д.Ботин и И.Ященко (5), Д.Ботин (6)

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

6 класс

6-1. Заметим, что первая половина нового восклицания совпадает с предыдущим восклицанием, а вторая является его «негативом», т.е. буквы «А» в ней заменены на буквы «У», и наоборот. Поэтому в пятницу инопланетянин воскликнет «АУУАУААУУААУАУУА!», а в субботу «АУУАУААУУААУАУУАУААУАУУААУУАУААУ!».

Комментарий. Слова, которые восклицает инопланетянин, обладают следующим свойством: если буквы занумеровать начиная с нуля, то n-я буква определяется четностью числа единиц в двоичной записи числа n (пишем А, если число единиц четно, У — если нечетно). Оказывается, такое бесконечное слово не содержит трех подряд одинаковых подслов (меньших слов). Можно придумать бесконечное слово в алфавите из трех букв, не содержащее двух подряд одинаковых подслов. (См. задачу 8-5 городской олимпиады 1993 г.)

6-2. *Ответ:* до встречи. При работе до встречи «быстрый» землекоп прокопает половину туннеля и еще часть. Если он остановится ровно на половине туннеля, то его часть придется копать «медленному» землекопу, поэтому времени и денег уйдет больше.

6-3. а) Из двух уголков можно сложить кирпич $3\times2\times1$, из шести уголков можно сложить три таких кирпича, а из них — большой кирпич $3\times3\times2$. Остается составить слой $3\times3\times1$ из уголка и шести кубиков.

б) Если удалить кубики из центров граней куба, то кубик в центре куба не будет граничить ни с каким другим, т.е. он не сможет быть частью уголка.

6-4. *Ответ:* $x = 2999$. Чтобы число x было наименьшим, нужно, чтобы сумма его цифр была наименьшей. А чтобы эта сумма была наименьшей, нужно, чтобы следующая сумма цифр была наименьшей. Поэтому числу 2 должно предшествовать наименьшее число с суммой цифр 2. Это число 11. Ему должно предшествовать наименьшее число с суммой цифр 11. Это 29. Числу 29 предшествует 2999.

Докажем, что наименьшее число с суммой цифр A меньше, чем наименьшее число с суммой цифр B, если $A < B$.

Действительно, пусть A_1 и B_1 — наименьшие числа с суммами цифр A и B. Найдем у числа B_1 самую младшую ненулевую цифру и вычтем из нее единицу. Число B_1 уменьшится хотя бы на 1, а сумма его цифр — ровно на 1. Будем продолжать этот процесс, пока числа A и B не сравняются. В этот момент $A_1 = B_1$, но число B_1 мы уменьшили, поэтому вначале было $A_1 < B_1$.

6-5. *Ответ:* (слева направо) Матроскин, дядя Федор, Печкин, Шарик. По условию, самый правый — Шарик. Пересадим его между котом и дядей Федором, тогда кот будет слева от всех. Справа от него будет Шарик, затем дядя Федор. Печкину остается место справа от всех. Пересадим Шарика обратно и получим ответ.

6-6. *Ответ:* равны. Прямоугольные треугольники с гипотенузами AE и CK, FB и DL равны по двум катетам, значит, $AE = CK$ и $FB = DL$; $EF = KD$ как стороны квадрата. Поэтому $AE + EF + FB = CK + KD + DL$.

6-7. *Ответ:* может. Заметим, что любой прямоугольник $m \times n$ можно обойти «змейкой», причем длина полученной дорожки будет mn клеток. Поэтому достаточно уметь раскладывать монеты вдоль дорожки. Докажем, что Али-Баба может расположить монеты вдоль дорожки в произвольном порядке (в частности, шахматном).

Пусть Али-Баба сделает шаг вперед и оглянется. Если в клетке лежит столько монет, сколько нужно, то он опять сделает шаг вперед и оглянется, а если — нет, то вернется и положит или возьмет монету. Затем опять сделает шаг вперед и оглянется и так далее. Таким способом он «правильно» расположит монеты во всех клетках, на которые он оглянулся. Не сможет он оглянуться только на последнюю клетку. Если в этой клетке все «правильно», то задача решена, а если — «неправильно», то он вернется на одну клетку и положит туда лишнюю монету, затем сделает шаг в последнюю клетку и исправит число монет, потом вернется в предпоследнюю и заберет лишнюю монету.

Единственный случай, когда Али-Баба не сможет расположить монеты в шахматном порядке — это когда пещера состоит из одной черной клетки.

6-8. *Ответ:* две команды. Наличие толстяков одинакового веса только упрощает задачу (поскольку их можно включить в одну команду). Поэтому рассмотрим случай, когда все веса различны. Попросим толстяков, вес которых отличается в два раза, взяться за руки. Тогда каждому толстяку придется держать за руку не больше двух других. Может ли цепочка толстяков замкнуться? Нет, не может, поскольку самый легкий толстяк может держать за руку только одного, более тяжелого. Поэтому вся сотня разобьется на цепочки. Раскрасим каждую цепочку в два цвета в шахматном порядке, а потом сформируем две «одноцветные» команды. Толстяки одного цвета не брались за руки, поэтому любые два из них не будут отличаться по весу в два раза. Особый случай — когда нет толстяков, вес которых отличается в два раза, — тогда хватит одной команды.

7 класс

7-1. *Ответ:* можно, см. рисунок 2. (С помощью компьютера проверено, что существует 36 принципиально различных расположений гвоздей.)

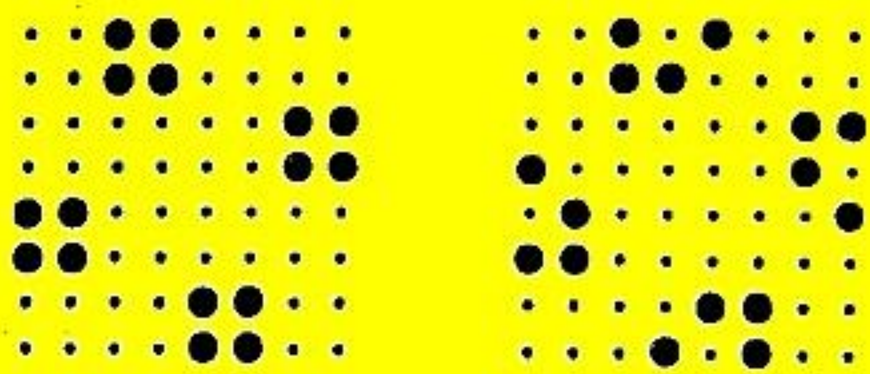


Рис.2

7-2. Разложим левую часть на множители:

а) $(x-y)(x+y) = 1993$. Учитывая, что число 1993 простое, получим: $x-y = 1$, $x+y = 1993$, либо $x-y = 1993$, $x+y = 1$. Откуда $x = 996$, $y = 997$.

б) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 1993$. Аналогично получим: $x-y = 1$, $x^2+xy+y^2 = 1993$, либо $x-y = 1993$, $x^2+xy+y^2 = 1$. Решений нет.

в) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2) = 1993$. Аналогично получим: $x-y = 1$, $x+y = 1$, $x^2+y^2 = 1993$, либо $x-y = 1993$, $x+y = 1$, $x^2+y^2 = 1$, либо $x-y = 1$, $x+y = 1993$, $x^2+y^2 = 1$. Решений нет.

7-3. Проделаем одинаковые операции с левой и правой частью: вычтем 1; сократим на 8; перевернем дроби; вычтем 1; и т.д. В итоге получим: $x = 1/9$.

7-4. *Ответ:* 2,8. Воспользуемся неравенством треугольника: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других, но больше их разности. Если длина диагонали равна 7,5, то из оставшихся чисел (длин сторон) можно было бы составить две пары, дающие в сумме больше чем 7,5. Однако это не так. Поэтому 7,5 не подходит. Аналогично не подходит 5. Если длина диагонали равна 1, то из оставшихся чисел можно было бы составить две пары, разность которых меньше чем 1. Однако это не так. Поэтому 1 не подходит. Аналогично не подходит 2. Единственный возможный ответ 2,8, который подходит.

Замечание. Поскольку из условия следует, что решение существует, то доказывать, что 2,8 подходит, не обязательно.

Однако могла произойти ошибка, и потому лишняя проверка не помешает.

7-5. *Ответ:* 1166666. Проведем все расчеты в «твердой валюте» — пустых бутылках, тогда инфляции не будет (т.е. бутылка с кефиром будет всегда стоить 7 пустых бутылок, а порция кефира в ней — 6). Тогда Гулливер, имея вначале «денег» на 1166666 порций кефира и еще на 4 пустые бутылки, сможет проводить свои коммерческие операции до тех пор пока не останется с четырьмя пустыми бутылками, а это значит, что он выпил 1166666 бутылок кефира.

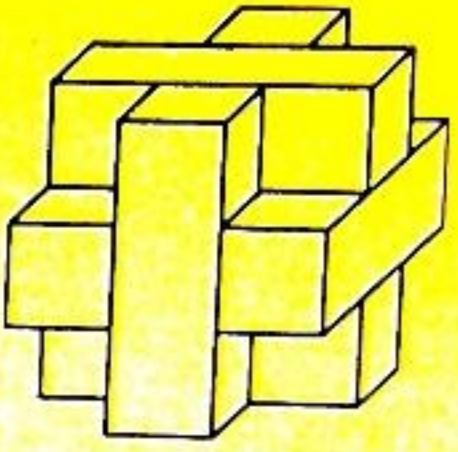


Рис.3

7-6. *Ответ*: можно, см. рисунок 3.

LVI МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА (1993 г.)

ШКОЛЬНЫЙ ТУР

5 класс

5-1. Решите уравнение $2 + \dfrac{180}{x-11} = 22$.

5-2. Вычислите площадь фигуры, изображенной на рисунке 4.

5-3*. Из 18 одинаковых кубиков сложили прямоугольный параллелепипед высотой в три кубика. Найдите площадь поверхности параллелепипеда, если площадь поверхности одного кубика 19 см^2.

5-4. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 26. Найдите уменьшаемое.

6 класс

6-1. Решите уравнение $\dfrac{16{,}04}{1{,}344} = \dfrac{m-5}{26{,}88}$.

6-2. Произведение двух взаимно простых чисел равно 1328.

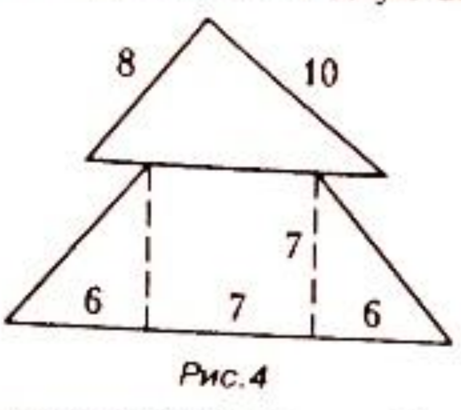


Рис.4

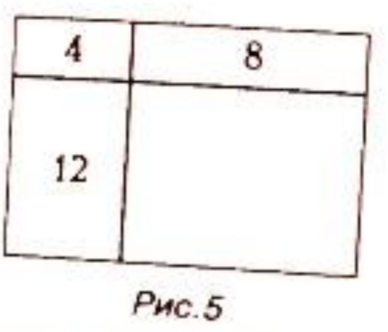


Рис.5

Чему равно наименьшее общее кратное этих чисел? Найдите эти числа.

6-3. Сравните числа x и y, если 15,5% числа x равны 14,5% числа y.

6-4. Прямоугольник разделен двумя отрезками на четыре прямоугольника, площади трех из которых 4см^2, 8см^2 и 12см^2 (рис.5). Найдите площадь прямоугольника.

7 класс

7-1. Две каменные лестницы имеют одинаковую высоту 5 м и одинаковое основание 7 м. Они покрыты ковровыми дорожками.

Первая лестница имеет 4 ступеньки, а вторая — 6. Хватит ли дорожки, покрывающей ступеньки первой лестницы, для покрытия второй?

7-2. Поезд проходит мимо светофора за 5 с, а мимо платформы длиной 150 м за 15 с. Найдите длину поезда и его скорость.

7-3. При делении двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 6, а в остатке 4. Найдите это число.

7-4. Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

5 класс

5-1. Можно потренироваться в устном счете: мысленно перенесем двойку и получим 20, затем сократим на 20 и получим 9; числитель равен знаменателю, поэтому $x = 20$.

5-2. *Ответ*: площадь фигуры равна 131 (квадратных единиц).

5-3. *Ответ*: 1) 171 $см^2$, 2) 133 $см^2$. Удобно выражать объем параллелепипеда в кубиках. С одной стороны, он равен 18 кубикам, а с другой, — есть произведение длины, ширины и высоты, поэтому произведение длины и ширины равно 6 (18 : 3), где за единицу принимаем сторону кубика. Но такое произведение можно получить двумя способами: $1\cdot 6$ и $2\cdot 3$, поэтому рассмотрим два параллелепипеда: $1\cdot 3\cdot 6$ и $2\cdot 3\cdot 3$. Получим два ответа: 54 и 42 (граней кубиков). Теперь переведем ответ в сантиметры (площадь грани кубика равна $19/6$ $см^2$).

5-4. *Ответ*: 13. Вычитаемое и разность в сумме дают уменьшаемое, поэтому два уменьшаемых равны 26.

6 класс

6-1. *Ответ*: $m = 325{,}8$. Вероятно, наблюдательным школьникам следовало заметить, что правый знаменатель в 20 раз больше левого, но при наличии у некоторых школьников калькулятора это было излишним.

6-2. *Ответ*: $16\cdot 83$ и $1\cdot 1328$. Разложим 1328 на множители, получим $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 83$. Все двойки должны быть в одном из чисел. Получаем два ответа: $16\cdot 83$ и $1\cdot 1328$. Наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно их произведению, в нашем случае оно равно исходному числу 1328.

Замечание. Хотя единица не является простым числом, она взаимно проста с каждым числом, в том числе сама с собой.

6-3. Из уравнения $15{,}5x = 14{,}5y$ следует, что $x < y$, если они положительные; $x = y$, если они равны нулю; и $x > y$, если они отрицательные.

6-4. *Ответ*: 24. У верхних прямоугольников есть общая сторона, поэтому если площадь правого вдвое больше, то и его длина вдвое больше. Следовательно, длина правого нижнего вдвое больше длины левого нижнего. Но у нижних прямоугольников тоже есть общая сторона, поэтому площадь правого вдвое больше площади левого.

7 класс

7-1. Красивое решение состоит в том, что длина ковровой дорожки складывается из горизонтальных и вертикальных отрезков. Сумма горизонтальных отрезков равна длине основания лестницы, а сумма вертикальных — ее высоте, поэтому длины ковровых дорожек равны.

Многие школьники поступали иначе: явно находили длину и высоту ступенек, а потом убеждались, что дорожки равны.

Замечание. Длина ковровой дорожки не зависит от числа ступенек, а зависит только от длины и высоты лестницы. На этом свойстве основан известный парадокс о том, что длина ступенчатой ломаной в квадрате не стремится к длине его диагонали при уменьшении длины ступенек.

7-2. *Ответ*: $v = 15$ м/с, $s = 75$ м. Пусть s — длина поезда, v — его скорость, тогда первое уравнение $s/v = 5$. Заметим, что от момента вхождения поезда на платформу до момента ухода с нее «хвост» поезда проходит расстояние $s + 150$, поэтому второе уравнение $(s + 150)/v = 15$.

7-3. *Ответ*: 10 или 64. Пусть a — цифра десятков, b — цифра единиц, тогда число можно записать в виде $10a + b$. Составим уравнение $10a + b = 6(a + b) + 4$. Откуда $4(a-1)=5b$.

7-4. Продлим медиану на ее длину за основание треугольника. Получим точку, которая дополняет треугольник до параллелограмма. Удвоенная медиана образует со сторонами параллелограмма углы данные в условии, поэтому такой параллелограмм единственный, а, следовательно, и треугольник единственный.

ОКРУЖНОЙ ТУР

8 класс

8-1. В озере плавает яблоко: 2/3 его под водой и 1/3 над водой. К нему подплывает рыбка и подлетает птичка, которые одновременно начинают его кушать, причем птичка в два раза быстрее, чем рыбка. Какую часть яблока скушает птичка и какую рыбка?

8-2. Сократите дробь $\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}$.

8-3. Леспромхоз решил вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил, сказав: «В нашем лесу 99% сосен. Мы будем рубить только сосны. После рубки сосны будут составлять 98% всех деревьев». Какую часть леса вырубит леспромхоз?

8-4. В квадрате $ABCD$ проведены отрезки CE и CF, где E — середина AB, F — середина AD. Докажите, что CE и CF делят BD на три равные части (рис.6).

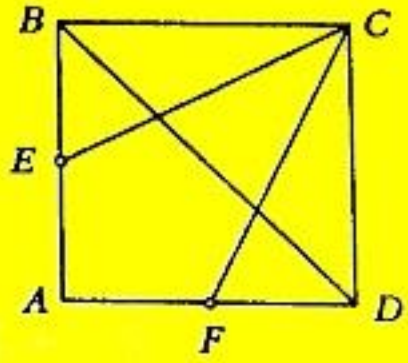


Рис.6

8-5. Докажите, что любое четырехзначное число больше произведения его цифр.

Задачи предложили: В.Ковальджи (1,3), А.Гольдман (2), А.Ковальджи (4,5)

9 класс

9-1. Докажите неравенство $\frac{5}{4}a^2+3ab+2b^2 \geq 0$, где a и b — действительные числа.

9-2. На диагонали прямоугольника выбрали точку и провели через нее прямые, параллельные сторонам. По разные стороны от диагонали образовались два прямоугольника. Докажите, что их площади равны.

9-3. По окружности стоят 10 чисел. Известно, что сумма любых трех, стоящих подряд, одинакова. Одно из чисел равно 9. Найдите остальные и докажите, что ответ единственный.

9-4. Даны 14 чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -7, -8, -9, -10, -11. Двое по очереди выбирают по одному числу, пока числа не кончатся. Затем каждый складывает свои 7 чисел. Побеждает тот, у кого больше сумма по абсолютной величине. Докажите, что будет ничья.

9-5. В треугольнике ABC $\angle B = 60°$, O — точка пересечения биссектрис AA_1 и CC_1. Докажите, что треугольник A_1OC_1 равнобедренный.

Задачи предложили: А.Ковальджи (2,3,4), А.Гольдман (1,5)

10 класс

10-1. Докажите, что уравнение $\sin x = ax$ не может иметь ровно 1992 решения.

10-2. Изобразите на плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ x \leq \sqrt{1-y^2}, \end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

10-3. Докажите, что из всех треугольников с данной стороной и данным противолежащим ей углом наибольшую площадь имеет равнобедренный.

10-4. Все стороны, кроме одной, у выпуклого многоугольника равны 1, а одна сторона — 2. Докажите, что в него нельзя вписать окружность.

10-5. Даны 10 чисел: $-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, -9, 10$. Два игрока по очереди выбирают по одному числу, пока числа не кончатся. Затем каждый складывает свои 5 чисел. Побеждает тот, у кого сумма больше по абсолютной величине. Докажите, что первый сможет выиграть.

Задачи предложили: А.Ковальджи (1,5), А.Гольдман (2,3), И.Шарыгин (4)

11 класс

11-1. Что больше: $2^{\sqrt{\log_2 3}}$ или $3^{\sqrt{\log_3 2}}$?

11-2. Путешественник выходит из гостиницы в 3 часа дня и возвращается в 9 часов вечера по тому же маршруту. Известно, что по ровным участкам он идет со скоростью 4 км/ч, в гору — 3 км/ч, под гору — 6 км/ч. Найдите расстояние, которое прошел путешественник, если он шел без отдыха.

11-3. $MABCD$ — пирамида, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. В каком отношении делится объем пирамиды плоскостью, проходящей через вершины A и D и середину ребра MC?

11-4. Назовем равнобедренный прямоугольный треугольник уголком. Разрежьте уголок на 6 попарно различных уголков.

11-5. В четырех подъездах живут кошки и собаки. В первом подъезде отношение числа кошек к числу собак больше, чем в третьем, а во втором — больше, чем в четвертом. Придумайте пример, когда отношение числа кошек к числу собак в первом и втором подъездах вместе окажется меньше, чем в третьем и четвертом.

Задачи предложили: А.Ковальджи (1), А.Шапиро (2), А.Гольдман (3), Ю.Браилов (4), В.Сальников (5)

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 класс

8-1. *Ответ*: птичка скушает 2/3 яблока, рыбка 1/3. Поскольку птичка и рыбка кушают яблоко с постоянными скоростями, положение яблока не имеет значения.

8-2. Поскольку $-x > 0$, $-y > 0$, то $x = -\left(\sqrt{-x}\right)^2$, $y = -\left(\sqrt{-y}\right)^2$. Получаем $-\left(\sqrt{-x}+\sqrt{-y}\right)^2 / \left(\sqrt{-x}+\sqrt{-y}\right) = -\left(\sqrt{-x}+\sqrt{-y}\right)$.

8-3. *Ответ*: срубят половину леса. Количество деревьев других пород не изменится. Вначале эти деревья составляли 1% леса, а после рубки составят 2%. Но если доля прочих деревьев возрастет в два раза, то это значит, что лес уменьшится в два раза.

8-4. Точки пересечения отрезков CE и CF с диагональю BD являются точками пересечения медиан треугольников ABC и ACD. Поскольку медианы делятся в точке пересечения в отношении 1:2, а треугольники равны, то расстояние между точками пересечения медиан равно расстояниям от них до вершин B и D.

8-5. $\overline{abcd} > \overline{a000} = a \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 > abcd$.

9 класс

9-1. Рассмотрим выражение $\frac{5}{4}a^2 + 3ab + 2b^2 \geq 0$ как квадратный трехчлен относительно a. Его дискриминант отрицательный. Следовательно, неравенство доказано.

9-2. Диагональ делит исходный прямоугольник и два внутренних на равные треугольники (рис.7). Отнимая от равных треугольников равные, получим фигуры равной площади.

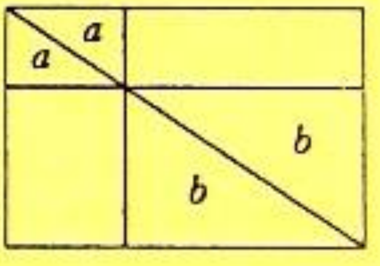


Рис.7

9-3. Рассмотрим соседние тройки чисел, у которых два числа общие. Получим, что числа, разделенные двумя другими, равны. Двигаясь по кругу через два числа, получим, что все числа равны 9.

9-4. Поскольку сумма всех чисел равна нулю, то суммы, набранные участниками, сложенные вместе будут давать нуль, т.е. будут равны по абсолютной величине.

9-5. Точка O лежит на биссектрисе угла B (рис.8). Проведем $OM \perp BC$, $OK \perp AB$, тогда $OM = OK$. Из треугольника AA_1B: $\angle AA_1B = 120° - \alpha$. Из треугольника AC_1C: $\angle AC_1C = 180° - 2\alpha - \beta$. Проверим равенство этих углов: $120° - \alpha = 180° - 2\alpha - \beta$; следовательно, $\alpha + \beta = 60°$. Это верно, так как в исходном треугольнике $2\alpha + 2\beta + 60° = 180°$.

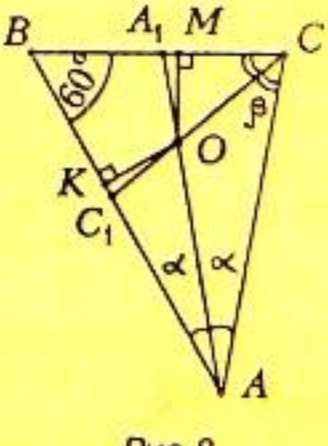


Рис.8

Из равенства углов AA_1B и AC_1C следует равенство треугольников OA_1M и OC_1K (по катету и острому углу), следовательно, $OC_1=OA_1$, и треугольник A_1OC_1 равнобедренный.

10 класс

10-1. Графики $y = \sin x$ и $y = ax$ симметричны относительно начала координат и проходят через начало координат. Поэтому число корней уравнения $\sin x = ax$ нечетно.

10-2. *Ответ*: площадь фигуры равна $\frac{3\pi}{4}+1$. Неравенство $y \le \sqrt{1-x^2}$ задает множество точек, лежащих ниже полуокружности $y=\sqrt{1-x^2}$ (рис.9), а неравенство $x \le \sqrt{1-y^2}$ — множе-ство точек, лежащих левее полуокружности $x=\sqrt{1-y^2}$.

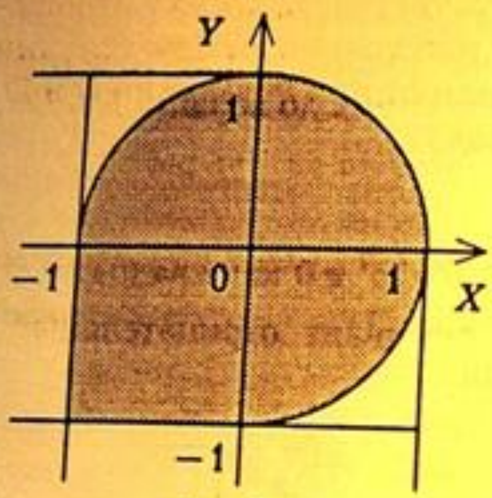


Рис.9

10-3. AB — данная сторона. Вершины всех углов, равных данному, расположены на дуге окружности, для которой AB является хордой. Площадь треугольника будет наибольшей, если высота, проведенная к AB, наибольшая. Середина дуги — самая удаленная от AB точка, следовательно, треугольник наибольшей площади равнобедренный.

10-4. Известно, что отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны. Рассмотрим концы стороны с длиной 2. Один из отрезков касательных будет не меньше 1. Тогда соседняя сторона будет больше 1, что противоречит условию задачи.

10-5. Сумма всех чисел положительная, поэтому первому игроку достаточно набрать сумму большую, чем у второго (если обе суммы будут положительные, то первый победит; если у первого положительная, а у второго отрицательная сумма, то у первого абсолютное значение будет больше, и он тоже победит). Если первый будет брать наибольшее из остающихся чисел, то его сумма будет больше.

11 класс

11-1. Прологарифмируем оба выражения (они положительные):

$$\sqrt{\log_2 3} \text{ и } \log_2 3\sqrt{\log_3 2}.$$

Возведем каждое из них в квадрат (они положительные) и сократим на положительное число $\log_2 3$: 1 и $\log_2 3 \log_3 2$.

Поскольку $\log_2 3 = 1/\log_3 2$, исходные числа равны.

11-2. *Ответ*: 24 км. *Указание*. Каждый участок пути путешественник проходит дважды, причем неровные участки и в гору и под гору. Найдите среднюю скорость на неровных участках.

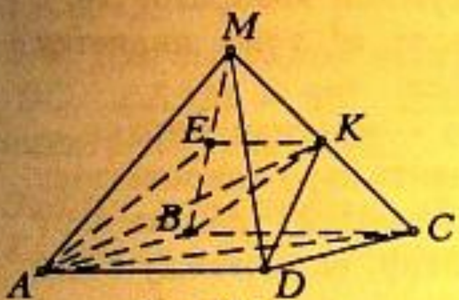


Рис.10

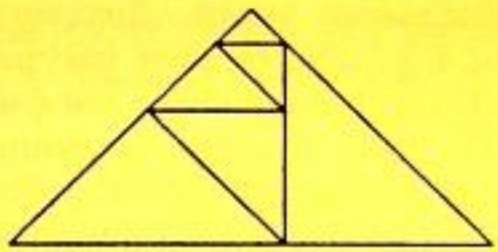


Рис.11

11-3. *Ответ:* 3:5. Объем данной пирамиды (рис.10) равен

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} H .$$

Объемы пирамид $ABCK$ и $ACDK$ равны между собой и равны

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{4} V.$$

Точка E лежит на середине отрезка BM, поэтому объем пирамиды $ABKE$ равен половине объема $ABKM$ или половине $ABKC$, т.е. $\frac{1}{8}V$. Итак, объем части пирамиды под сечением $AEKD$ равен

$$\frac{1}{4}V + \frac{1}{4}V + \frac{1}{8}V = \frac{5}{8}V .$$

11-4. Пример приведен на рисунке 11.

11-5. Пример:

Подъезд	Кошки	Собаки	Отношения
1	5	6	$\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$
2	2	9	
3	4	5	$\frac{2}{9} > \frac{1}{5}$
4	1	5	
1 и 2	7	15	$\frac{7}{15} < \frac{5}{10}$
3 и 4	5	10	

8 класс

8-1. Обозначим через $s(x)$ сумму цифр натурального числа x. Решите уравнения:

а) $x + s(x) + s(s(x)) = 1993$;

б) $x + s(x) + s(s(x)) + s(s(s(x))) = 1993$.

8-2. Известно, что число n является суммой квадратов трех натуральных чисел. Докажите, что число n^2 тоже является суммой квадратов трех натуральных чисел.

8-3. На прямой стоят две фишки: слева — красная, справа — синяя. Робот знает две операции: 1) поставить пару одноцветных фишек (между стоящими фишками или с краю); 2) удалить пару одноцветных фишек (фишки образуют пару, если между ними нет других фишек). Может ли робот оставить на прямой ровно две фишки: слева — синюю, а справа — красную?

8-4. Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с тремя стрелками на одной оси мы видим после часовой стрелки (по ходу часов) сначала минутную, а потом секундную. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого? (Стрелки двигаются с постоянной скоростью.)

8-5. Существует ли слово (конечная последовательность букв), в котором нет двух соседних одинаковых подслов (т.е. меньших слов), но таковые появляются, если приписать любую букву к любому концу?

8-6. Дан треугольник ABC. Окружность с центром D проходит через точки A, B и O — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

Задачи предложили: Б.Кукушкин (1), В.Слитинский (2), А.Канель-Белов (3), Д.Ботин (4), А.Спивак (5), И.Акулич (6)

9 класс

9-1. На плоскости дан отрезок AB. Найдите геометрическое место таких точек C, что треугольник ABC остроугольный, а его угол A — средний по величине (не наибольший и не наименьший).

9-2. Найдите x_{1000}, если $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, и при любом натуральном $n \geq 3$ число x_n — наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$.

9-3. Бумажный треугольник с углами 20°, 20°, 140° разрезают по одной из биссектрис на два треугольника, один из которых также разрезают по биссектрисе и так далее. Может ли после нескольких разрезов получиться треугольник, подобный исходному?

9-4. У Пети 28 одноклассников. У всех 28-ми различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?

9-5. Каждой паре чисел x и y поставлено в соответствие некоторое число $x * y$. Найдите $1993 * 1935$, если известно, что для любых x, y и z выполнены тождества: $x * x = 0$ и $x * (y * z) = (x * y) + z$.

9-6. Дан выпуклый четырехугольник $ABMC$, в котором $AB = BC$, $\angle BAM = 30°$, $\angle ACM = 150°$. Докажите, что AM — биссектриса угла BMC.

Задачи предложили: И.Шарыгин (1, 6), С.Конягин (2), А.Галочкин (3), С.Токарев (4), Г.Гальперин (5)

10 класс

10-1. При разложении чисел A и B в бесконечные десятичные дроби длины минимальных периодов этих дробей равны 6 и 12. Чему может равняться длина минимального периода $A+B$?

10-2. Дед барона К.Ф.И. фон Мюнхгаузена, построив квадратный замок, разделил его на 9 равных квадратных залов и в центральном разместил арсенал. Отец барона разделил каждый из 8 оставшихся залов на 9 равных квадратных холлов и во всех центральных холлах устроил зимние сады. Сам барон разделил каждый из 64 свободных холлов на 9 равных квадратных комнат и в каждой из центральных комнат устроил бассейн, а остальные сделал жилыми. Барон хвастается, что ему удалось обойти все жилые комнаты, побывав в каждой по одному разу, и вернуться в исходную (между соседними комнатами есть дверь). Могут ли слова барона быть правдой?

10-3. От любой точки на любом из берегов реки расстояние до другого берега не больше 1000 м. Всегда ли корабль может пройти вдоль реки так, чтобы находиться все время на расстоянии от каждого берега не больше а) 700 м? б) 800 м? (Река соединяет два озера; береговые линии состоят из конечного числа отрезков прямых и дуг окружностей; корабль считается точкой.) по воде

10-4. Для каждой пары действительных чисел a и b рассмотрим последовательность $p_n = [2\{an+b\}]$, где фигурные скобки означают дробную часть числа, а квадратные — целую часть. Любые k подряд членов этой последовательности назовем словом. Верно ли, что любой упорядоченный набор из нулей и единиц длины k будет словом в некоторой последовательности p_n, если а) $k = 4$? б) $k = 5$?

10-5. В ботаническом определителе используются сто признаков. Каждый из признаков либо присутствует у растения, либо отсутствует. Назовем определитель хорошим, если любые два растения в нем различаются больше, чем по 50 признакам. Докажите, что в хорошем определителе описано не больше 50 растений.

10-6. На стороне AB треугольника ABC внешним образом строится квадрат с центром O. Точки M и N — середины сторон
V BC и AC, а длины этих сторон равны a и b соответственно. Найдите максимум суммы $OM + ON$, когда угол ACB меняется.

Задачи предложили: С.Гашков (1,2), Г.Кондаков (3), А.Владимиров и Р.Измайлов (4), Д.Терешин (5), И.Шарыгин (6)

11 класс

11-1. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = p$, $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = q$. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и исследуйте ответ в зависимости от параметров p и q.

11-2. Единичный квадрат разбит на конечное число квадратиков (возможно, неравных). Может ли сумма периметров квадратиков, пересеченных диагональю квадрата, быть больше 1993? (Касание считается пересечением.)

$n \geq 3$ **11-3.** Даны n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Параллельные прямые задают одно направление. Какое наименьшее число направлений может оказаться?

11-4. В ящиках лежат камни. За один ход выбирают число k и в каждом ящике делят камни на группы по k штук (с остатком). Затем оставляют по одному камню от каждой группы и весь остаток. Можно ли за 5 ходов добиться того, чтобы во всех ящиках осталось ровно по одному камню, если в каждом из них изначально было не больше а) 460 камней; б) 461 камня?

11-5. а) Известно, что функция $f(x)$ определена на отрезке $[-1,1]$, и $f(f(x)) = -x$ при всех x, а ее график является объединением конечного числа точек и интервалов. Нарисуйте график функции $f(x)$ (хотя бы один).

б) Можно ли это сделать, если область определения функции — интервал $(-1, 1)$? Вся числовая ось?

11-6. Внутри правильного тетраэдра с ребром 1 м летает муха. Она побывала на каждой грани и вернулась в исходную точку. Какое наименьшее расстояние она могла пролететь? (Докажите, что меньше пролететь она не могла).

Задачи предложили: А.Канель-Белов (1,2,5), А.Анджанс (3), С.Гусейн-Заде и И.Ященко (4), И.Шарыгин (6)

8 класс

8-1. а) Все числа x, $s(x)$, $s(s(x))$ и $s(s(s(x)))$ дают одинаковые остатки от деления на 3, поэтому $x+s(x)+s(s(x))$ делится на 3. Но 1993 не делится на 3, поэтому решений нет.

б) Поскольку $x < 1993$, то $s(x) \le s(1989) = 27$, $s(s(x)) \le s(19) = 10$, $s(s(s(x))) \le 9$.

Из уравнения следует, что

$$x = 1993 - s(x) - s(s(x)) - s(s(s(x))) \ge 1993 - 27 - 10 - 9 = 1947.$$

Все числа x, $s(x)$, $s(s(x))$, $s(s(s(x)))$ дают одинаковые остатки при делении на 9, а 1993 дает остаток 4, поэтому x должен давать остаток 1. Среди чисел от 1947 до 1993 остаток 1 при делении на 9 дают 1954, 1963, 1972, 1981, 1990. Подходит только 1963.

8-2. $n^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 = \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2$. Можно считать, что $a \ge b \ge c$, тогда $a^2 + b^2 - c^2 > 0$.

Комментарии. Можно доказать аналогичное утверждение для суммы четырех и более квадратов. Пусть m – число квадратов.

Для $m=2$ утверждение не всегда верно: $\left(1^2 + 1^2\right)^2 = 4$ не представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, хотя есть аналогичное тождество: $\left(a^2 + b^2\right)^2 = \left(a^2 - b^2\right)^2 + (2ab)^2$.

Если допустить равенство некоторых квадратов нулю, то тогда все натуральные числа представимы в виде суммы четырех квадратов. Это знаменитая теорема Лагранжа.

Есть числа, которые не представимы суммой трех квадратов, например, 7. Оказывается, все такие числа представимы в виде $(8k+7)\cdot 4^l$.

Произведение чисел, представимых суммой трех квадратов, не всегда можно представить в том же виде. (Это следует из предыдущего утверждения.)

Фактически, представимость результата в заданном виде мы доказываем не для чисел, а для многочленов от нескольких переменных, выписывая тождество.

Неожиданно глубоким оказался вопрос о представимости произведения чисел, представимых суммой n квадратов. Положительный ответ существует только для $m=1$, 2, 4, 8. Выпишем соответствующие тождества:

$m=1$ $\quad a^2b^2 = (ab)^2$

$m=2$ $\quad \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$

(тождество Диофанта)

$$m=4\quad (a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)=$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)^2+(a_1b_2+c_1d_2+a_2b_1-c_2d_1)^2+$$
$$+(a_1c_2+a_2c_1+b_2d_1-b_1d_2)^2+(a_1d_2+a_2d_1+b_1c_2-b_2c_1)^2$$

(тождество Эйлера)

$m=8$ — выписывать тождество не будем.

Для $n\neq 1, 2, 4, 8$ аналогичных тождеств не существует.

Поясним, как выводятся эти тождества. Сумму квадратов можно интерпретировать, как квадрат длины вектора. Тогда сами векторы образуют множества, эквивалентные следующим алгебрам: при $n=1$ — действительных чисел, при $n=2$ — комплексных чисел, при $n=4$ — кватернионов, и при $n=8$ — октав (алгебре Кэли). Приведем таблицу умножения для мнимых единиц кватернионов (i,j,k):

$$i^2=j^2=k^2=-1;\ ij=k;\ ji=-k;\ ki=j;\ ik=-j;\ jk=i;\ kj=-i.$$

Тогда для $x_1=a_1+b_1i+c_1j+d_1k$, $x_2=a_2+b_2i+c_2j+d_2k$ определено произведение x_1x_2 и справедливо тождество:

$$\text{длина}(x_1)\text{длина}(x_2)=\text{длина}(x_1x_2).$$

8-3. *Ответ*: нельзя. *Решение 1.* Пометим исходные фишки. Если рядом с помеченной фишкой вставляются две фишки того же цвета, то их тоже пометим. Тогда помеченных фишек каждого цвета всегда будет нечетное число. Значит, помеченные фишки не могут исчезнуть. Но все красные помеченные находятся слева от всех синих помеченных (поскольку при каждой операции такое положение сохраняется). Следовательно, если останутся две фишки, то обе они будут помеченные, и красная будет слева.

Замечание. Если в результате удаления синих фишек непомеченные красные окажутся рядом с помеченными, то их помечать не надо.

Решение 2. Рассмотрим число разноцветных пар (не только соседних), где левая фишка красная, и заметим, что четность этого показателя не меняется. Но в исходной ситуации наш показатель равен 1, а в желаемой — равен нулю. Поэтому перейти к желаемой ситуации невозможно.

Замечание. В качестве инварианта можно выбрать число красных фишек, справа от которых стоит нечетное число синих.

Решение 3. Сопоставим каждой красной фишке симметрию относительно точки A, а каждой синей — симметрию относительно точки B. Тогда последовательность фишек задает композицию центральных симметрий. Легко видеть, что каждая операция над фишками не меняет композицию симметрий. Но начальному и конечному расположению фишек соответствуют разные композиции (параллельные переносы на векторы $2AB$ и $-2AB$).

Комментарий. Эта задача родилась из известной теоремы: *два непрерывных пути внутри квадрата, соединяющие противоположные вершины, пересекаются.* Дадим набросок доказательства.

Допустим, что пути не пересекаются. Тогда их можно заменить ломаными, которые тоже не пересекаются, и звенья которых не параллельны сторонам квадрата. Покрасим одну ломаную в красный цвет, а другую – в синий. Будем параллельно передвигать прямую от одной стороны квадрата к другой (рис.12).

Рис.12

Прямая будет пересекать ломаную по набору красных и синих точек, с которым будет происходить то же самое, что с фишками в задаче (если пересечением считать прохождение прямой через внутренние точки звеньев ломаной).

Общее утверждение именуется теоремой Жордана: *непрерывная замкнутая несамопересекающаяся кривая делит плоскость на две части*.

Основная трудность доказательства состоит в том, что определение непрерывной кривой допускает интуитивно неочевидные конструкции, например, кривую, у которой нет ни одного гладкого участка. Поэтому неясно даже, как выбрать две точки по разные стороны от кривой, чтобы доказать, что их нельзя соединить путем, не пересекающим кривую. В случае кривой, имеющей хотя бы один гладкий участок, этой трудности нет.

8-4. Основная идея: если стрелки показывают хорошее время, то их зеркальное отражение показывает плохое, и наоборот (рис.13).

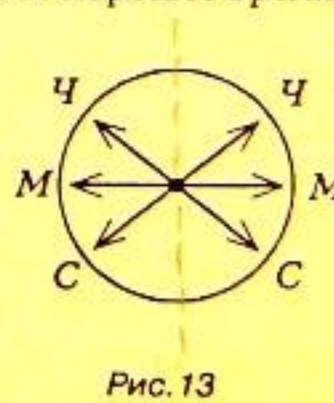


Рис.13

В полночь стрелки совпадают. Если пустить часы назад, то стрелки будут показывать какое-то вчерашнее время, а их расположение будет зеркально симметричным положению стрелок на обычных часах.

Итак, каждому хорошему моменту сегодня соответствует плохой момент вчера. Причем интервалу хорошего времени соответствует интервал плохого. Значит, хорошего времени сегодня столько же, сколько было плохого вчера. Поэтому хорошего и плохого времени в сутках поровну.

Замечания. 1. Казалось бы, зачем вводить часы, идущие назад, если каждому положению стрелок можно поставить в соответствие зеркальное положение? Ведь моментам хорошего времени будут соответствовать моменты плохого и наоборот? Но в таком рассуждении есть пробел, поскольку не очевидно, что после зеркального отражения стрелок получится нечто осмысленное, ибо не всякому положению стрелок соответствует время суток. (Приведите пример положения стрелок, которого не бывает на правильно идущих часах.)

2. Установить соответствие между моментами плохого и хорошего времени в сутках было недостаточно для доказательства равенства количеств плохого и хорошего времени. (Приведите пример взаимно однозначного соответствия между точками отрезков разной длины.) Но от школьников не требовалось устанавливать соответствие между интервалами плохого и хорошего времени, поскольку в данной задаче это интуитивно очевидно.

8-5. Рассмотрим последовательность слов: А, АБА, АБАВАБА, АБАВАБАГАБАВАБА,... Докажем по индукции, что n-е слово удовлетворяет условию задачи для алфавита из первых n букв.

Для $n = 1$ утверждение очевидно.

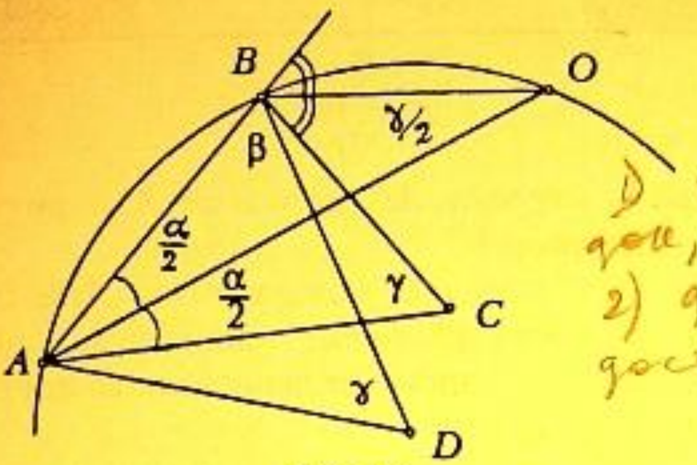
Пусть утверждение справедливо для всех слов с номерами от 1 до $n-1$. Рассмотрим n-е слово. В нем n-я буква алфавита стоит в центре и разбивает слово на два одинаковых подслова, совпадающих с $(n-1)$-м словом.

Если бы нашлись два соседних одинаковых подслова, то, по предположению индукции, они не могли бы располагаться оба в $(n-1)$-м слове. Значит, одно из них содержит n-ю букву алфавита. Но эта буква только одна, и в соседнем подслове ее нет. Противоречие. Следовательно, в n-м слове тоже нет соседних одинаковых подслов.

Если приписать к n-му слову n-ю букву алфавита, то слово будет состоять из двух одинаковых подслов. Если приписать букву с номером $k < n$, то k-е слово, которое является началом и концом n-го слова, даст два соседних одинаковых подслова. (Длина искомого 33-го слова равна $2^{33}-1$, что составляет примерно 10 миллиардов букв!)

Комментарий. Построенные слова играют важную роль в комбинаторике и теории полугрупп. Определим последовательность слов Z_n равенствами: $Z_1 = x_1$; $Z_{n+1} = Z_n x_{n+1} Z_n$, где x_i —

переменные (вместо которых можно подставлять слова). Попытайтесь доказать, что в любой бесконечной последовательности букв из конечного алфавита (для каждого n) встретится слово вида Z_n, где вместо $x_1, \dots, x_n$ подставлены некоторые слова. Например, встретится слово вида $x_1 x_2 x_1$, где x_1, x_2 — слова.



План решения:
1) достаточно док, что $\angle D = \angle C$.
2) для этого достат. $\angle O = \frac{\gamma}{2}$

Рис.14

8-6. Пусть α, β, γ — углы при вершинах ΔABC (рис.14), тогда

$$\angle BAO = \frac{\alpha}{2}, \ \angle CBO = 90° - \frac{\beta}{2}$$

(поскольку точка O лежит на биссектрисе угла A и на биссектрисе внешнего угла при вершине B).

$$\angle ABO = \beta + \angle CBO = 90° + \frac{\beta}{2}.$$

Из ΔAOB: $\angle AOB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \left(90° + \frac{\beta}{2}\right) = 90° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$ (поскольку $\alpha + \beta + \gamma = 180°$). С другой стороны, $\angle O = \angle D/2$ как вписанный в окружность с центром D. Значит, $\angle D = \gamma$. По обратной теореме о вписанных углах точки C и D лежат на одной окружности с хордой AB.

Замечания. 1. Точки O, C, D лежат на одной прямой, поскольку $\angle AOC = \frac{\beta}{2}$ и $\angle AOD = \frac{\beta}{2}$ (докажите).

2. Утверждение задачи верно и для вписанной окружности.

9 класс

9-1. *Ответ*: множество точек, заштрихованное на рисунке 15. Множество точек, где $\angle A < 90°$ и $\angle B < 90°$, есть полоса, границы которой проходят через точки A и B и перпендикулярны отрезку AB.

Область, где $\angle C < 90°$, есть внешность круга, построенного на отрезке AB, как на диаметре.

Условие $\angle B \le \angle A \le \angle C$ эквивалентно $AC \le BC \le AB$, что выполнено, когда точка C лежит по одну сторону от серединного

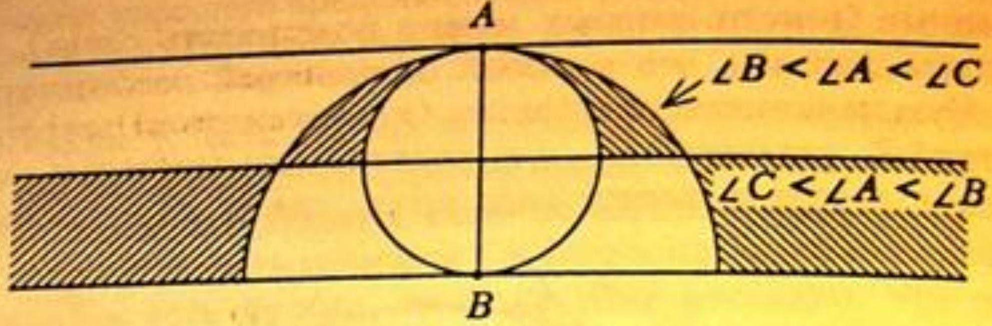


Рис. 15

перпендикуляра к отрезку AB с точкой A и внутри круга с центром B и радиусом AB.

Аналогично, $\angle C \le \angle A \le \angle B$ эквивалентно $AB \le BC \le AC$, что выполнено, когда точка C лежит вне круга с центром B и радиусом AB и по одну сторону от серединного перпендикуляра к отрезку AB с точкой B.

9-2. Выпишем несколько первых членов и их разности:

$$x_3=9,\ x_4=14=x_3+5,\ x_5=20=x_4+6,\ x_6=27=x_5+7,\ \ldots$$

Возникает гипотеза, что при $n \ge 4$

$$x_n = x_{n-1} + n + 1.$$

Если эта гипотеза верна, то $x_n = x_3 + 5 + \ldots + (n+1) = \dfrac{n(n+3)}{2}$.

Докажем эту формулу по индукции. При $n=4$ она верна.

Пусть при некотором n она верна для $x_4, \ldots, x_n$. Докажем, что тогда $x_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+4)}{2}$. Действительно:

$$x_{n+1} > 2x_n - x_{n-1} = 2\frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1$$

и следующее за этим число составное (поскольку один из сомножителей четный и каждый из них больше двух). Значит, $x_{1000} = 1000 \cdot 1003/2 = 501500$.

9-3. Предположим, что на каком-то шаге мы получили треугольник, подобный исходному. Заметим, что все его углы кратны 20°. Покажем, что у предыдущего, и вообще у всех предыдущих треугольников углы кратны 20°.

Пусть к треугольнику с углами α, β, γ приклеили ранее отрезанный угол α, тогда получится треугольник с углами 2α, β, $\gamma - \alpha$, которые кратны любому общему делителю углов α, β, γ.

Однако делимость на 20 теряется уже после первого разрезания исходного треугольника. Противоречие. Значит, треугольник, подобный исходному, получить нельзя.

9-4. Для одноклассников Пети есть 29 вариантов числа друзей: 0, 1, 2,..., 28. Но, если кто-то дружит со всеми, то у всех не меньше одного друга. Поэтому либо есть такой, кто дружит со всеми, либо есть такой, кто не дружит ни с кем. В обоих случаях остается 28 вариантов: 1, 2,..., 28, либо 0, 1,..., 27.

Самый дружелюбный дружит с Петей, а самый недружелюбный – нет. Если мы переведем этих двоих в другой класс, то у оставшихся одноклассников будет разное число друзей. Повторяя эти рассуждения 14 раз, мы переведем в другой класс 14 пар, в каждой из которых один Петин друг. Итак, друзей у Пети 14.

ровно

Замечание. Есть очень короткое, но неправильное решение. Пусть у Пети x друзей. Сделаем врагов друзьями, а друзей врагами, тогда у петиных одноклассников снова будет разное число друзей, и значит у Пети снова x друзей. Получаем уравнение $x = 28 - x$. Где ошибка? Если бы было доказано, что количество друзей у Пети всегда одинаковое, то рассуждение было бы верным. Решите задачу, если число петиных одноклассников равно 27. Однако, это рассуждение позволяет угадать ответ.

9-5. Рассмотрим частный случай:

$$x*(y*y) = x*0 = x*(x*x) = x*x+x = x.$$

С другой стороны, $x*(y*y) = x*y + y$, поэтому $x*y + y = x \Rightarrow$
$\Rightarrow x*y = x - y$. Ответ: 58.

9-6. *Решение* 1. Пусть B' – точка, симметричная точке B относительно прямой AM (рис.16). Тогда $AB = AB'$, $\angle BAB' = 60°$, и $\Delta ABB'$ – равносторонний. Значит, точки A, C и B' лежат на окружности с центром B. Угол ACB' – вписанный и равен половине угла ABB', т.е. $\angle ACB' = 30°$. Поскольку $\angle ACM = 150°$, то точка B' лежит на прямой MC. По построению AM – биссектриса угла BMB', а значит, и угла BMC.

Решение 2. Обозначим $AB = BC = a$, $BM = b$, $\angle BMA = \alpha$, $\angle AMC = \beta$ (рис.17). Тогда $\angle CAM = 30° - \beta$, $\angle BCA = \angle BAC = 60° - \beta$, $\angle BCM = 90° + \beta$. По теореме синусов из ΔABM:

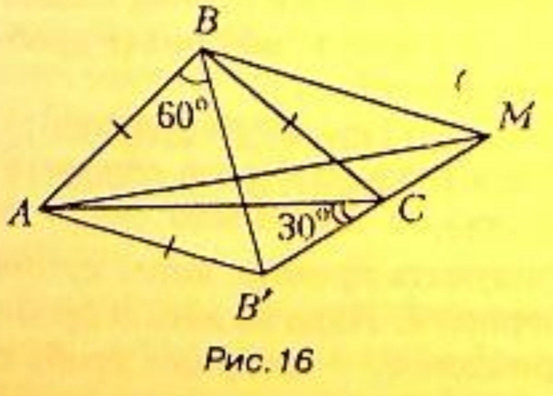


Рис.16

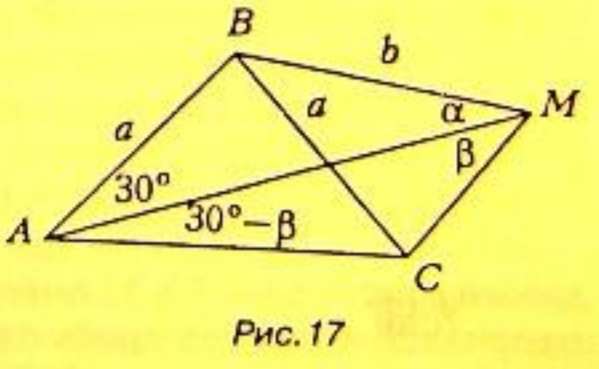


Рис.17

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = 2b$; из ΔBMC: $\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{b}{\cos\beta}$. Исключая a и b, получим: $\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \Rightarrow \sin(\alpha-\beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$, т.е. AM — биссектриса.

10 класс

10-1. *Ответ*: 12 или 4. Для краткости мы пишем «период» вместо «длина периода». Докажем, что если k является одним из периодов дробей A и B, то k будет периодом $A + B$. Достаточно рассмотреть чисто периодические дроби (у которых нет предпериода), поскольку любая дробь есть сумма чисто периодической дроби и конечной дроби.

Действительно, чисто периодическую дробь с периодом k можно представить в виде обычной дроби со знаменателем $10^k - 1$ (это следует из формулы для суммы геометрической прогрессии). Обратное тоже верно: если число можно представить дробью со знаменателем $10^k - 1$, то k будет периодом. Сумму двух дробей с общим знаменателем можно записать дробью с таким же знаменателем, а значит и с таким же периодом.

Докажем, что минимальный период дроби является делителем любого другого ее периода. Достаточно доказать, что ненулевой остаток от деления одного периода на другой тоже является периодом. (Если бы при делении на минимальный период остаток был ненулевой, то он был бы периодом, меньшим минимального.)

Если передвинуть все цифры десятичной дроби на любой период вправо, то бесконечная часть ряда перейдет в себя. Аналогично при сдвиге влево. И наоборот: если при сдвиге на несколько цифр бесконечная часть ряда переходит в себя, то этот сдвиг является периодом. Следовательно, и сумма и разность двух периодов является периодом. Поэтому и остаток от деления любого периода на минимальный является периодом (если он ненулевой).

Поскольку 12 — период $A+B$, то минимальный период является делителем 12. Но он не равен 6, 3, 2 или 1, ибо иначе дробь $B = (A+B) - A$ имела бы период меньше 12.

$A+B$ может иметь минимальный период 12 или 4: $A = 0,(000001)$, $B = 0,(000000000001)$, $A+B = 0,(000001000002)$; $A = 0,(000001)$, $B = 0,(011100110110)$, $A+B = 0,(0111)$.

Замечания. 1. Покажем, как придумать пример, когда сумма дробей с периодами 6 и 12 имеет период 4. Надо из любой дроби с периодом 4 вычесть дробь с периодом 6, — получим дробь с периодом 12. Затем перенесем дробь с периодом 6 в другую часть равенства.

2. Если k_1 и k_2 — периоды, то $mk_1 + nk_2$ — тоже период. С помощью алгоритма Евклида устанавливается, что НОД(k_1, k_2) представим в указанном виде. По сути дела, наше доказательство повторяло рассуждения, связанные с алгоритмом Евклида.

3. Опишем все возможные минимальные периоды $A+B$ в общем виде. Пусть m, n и k — минимальные периоды дробей A, B и $A+B$. Тогда k является делителем наименьшего общего кратного НОК(m,n). Аналогично, m — делитель НОК(n,k), и n — делитель НОК(m,k). Значит, k содержит простые делители в степенях, которые есть в m, но нет в n, и есть в n, но нет в m, а если простой делитель входит в m и n в равных степенях, то в k он может входить в любой степени от нуля до максимума. Формально это записывается так: пусть $p_1, \ldots, p_s$ — все простые делители НОК(m,n), причем

$$m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s},\; n = p_1^{\beta_1} \ldots p_s^{\beta_s},$$

где α_i, β_j могут равняться нулю, тогда $k = p_1^{\gamma_1} \ldots p_s^{\gamma_s}$, где $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ при $\alpha_i \neq \beta_i$, и γ_i — любое, от 0 до α_i, при $\alpha_i = \beta_i$.

10-2. Легко обойти один холл. Нарисуем обход каждого холла и покажем, как из них получить обход замка. Объединим сначала обходы двух холлов (рис. 18), т.е. мы перестраиваем

Рис. 18

пути движения в двух парах клеток вдоль границы холлов. В результате два замкнутых маршрута объединяются в один. Затем мы рассмотрим холл, который граничит с уже обойденными. Снова с помощью перестройки путей вдоль границы холлов объединим два обхода в один. Получим обход трех холлов. И так далее объединим обходы всех холлов в один замкнутый маршрут.

Замечание. Из решения следует, что обойти можно любой замок, в котором холлы образуют связное множество (т.е. из любого холла можно пройти в любой другой, пересекая общие границы холлов).

10-3. а) Отсутствие такого маршрута вытекает из рисунка (рис.19). Маршрут корабля должен пересекать отрезок AB. Тогда расстояние от любой точки AB до одного из берегов больше 700м.

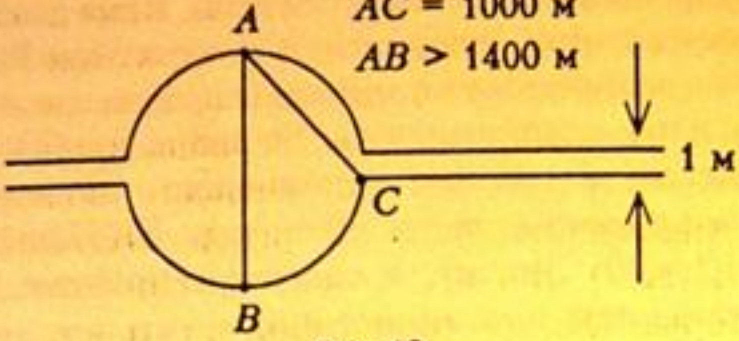


Рис. 19

б) Построим такой маршрут. Выберем часть плоскости по одну сторону от правого берега, содержащую левый берег, и рассмотрим множество точек, удаленных от правого берега на 800 м. Построить его можно так: возьмем красящий круг радиусом 800 м и протащим его центр вдоль правого берега. Тогда круг закрасит полосу, граница которой тянется вдоль реки (обозначим ее L).

Если L вся идет по суше, то левый берег даст искомый маршрут. Если L вся на воде, то рассмотрим L в качестве маршрута. Если L пересекает левый берег, то участки L вне реки заменим участками левого берега и рассмотрим полученный маршрут. Каждая точка такого маршрута отстоит от правого берега не больше, чем на 800 м. Докажем, что и от левого берега тоже.

Допустим, что это неверно, т.е. найдется точка на маршруте, удаленная от левого берега больше чем на 800 м. Тогда круг с центром в этой точке и радиусом 800 м целиком лежит на воде. Докажем, что тогда найдется точка на одном из берегов, расстояние от которой до другого берега больше 1000 м.

Рассмотрим множество лучей с началом в центре O этого круга и покрасим их в два цвета: в синий цвет, если первое пересечение луча происходит с правым берегом, и в красный, если — с левым. Соответственно покрасим точки окружности. Докажем, что найдется одноцветная дуга окружности величиной не меньше 180°. Для этого докажем, что окружность состоит не больше чем из двух разноцветных дуг.

Допустим, что это неверно, и разноцветных дуг больше двух. Поскольку дуги чередуются, то их четное число. Возьмем по одной точке на четырех соседних дугах: красную K_1', синюю C_1', красную K_2', синюю C_2' и соответствующие им точки первого пересечения лучей с берегами: K_1, C_1, K_2, C_2 (рис.20).

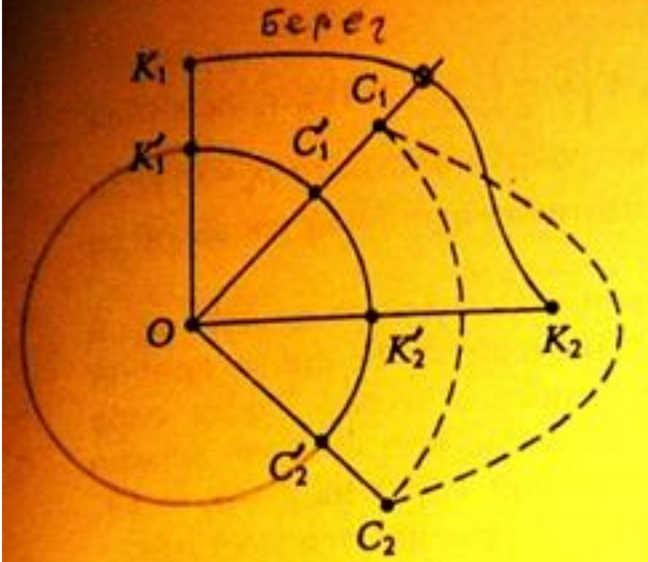


Рис.20

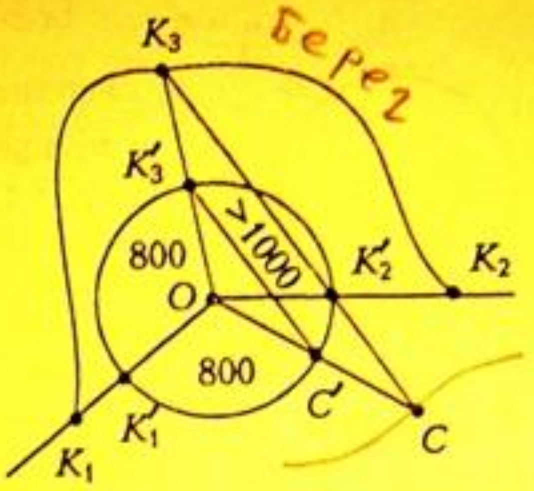


Рис.21

Береговая линия между K_1 и K_2 должна пересекать один из лучей OC_1, OC_2 (пусть OC_1), причем дальше от центра, чем C_1. Рассмотрим контур, состоящий из береговой линии между K_1 и K_2 и отрезков OK_1 и OK_2. Этот контур разделяет точки C_1 и C_2, поэтому береговая линия между C_1 и C_2 должна его пересечь, но это невозможно (поскольку берега не пересекаются и есть правило раскраски). Следовательно, дуг не больше двух, а тогда найдется одноцветная дуга (пусть красная) не меньше 180°.

Возьмем концы этой дуги K_1', K_2', ее середину K_3' и соответствующие точки берега K_1, K_2, K_3 (рис.21).

Построим контур, состоящий из береговой линии между K_1 и K_2 и отрезков OK_1 и OK_2. Кратчайший путь от K_3 до другого берега пересекает один из отрезков OK_1, OK_2. Следовательно, этот путь будет виден из точки O под углом не меньше 90°, но такой путь с концами вне круга будет длиннее 1000 м. Это противоречит условию.

Итак, круг с центром на указанном маршруте радиусом 800 м поместить между берегами невозможно, поэтому всегда будет точка левого берега, отстоящая от указанного маршрута не больше, чем на 800 м.

Замечание. Задача возникла из попыток определить понятие критической точки негладкой функции. Берега реки — это линии уровня непрерывной функции, а наличие маршрута — существование гладкой функции с теми же линиями уровня.

10-4. Изобразим числа точками на окружности единичной длины, тогда преобразование $\{b\} \to \{b+a\}$ — это поворот окружности на дугу длиной $\{a\}$. Последовательность $x_n = \{an+b\}$ — это последовательность точек на окружности, получаемых из b n-кратным поворотом на дугу $\{a\}$ (рис.22). При этом $p_n = [2x_n]$.

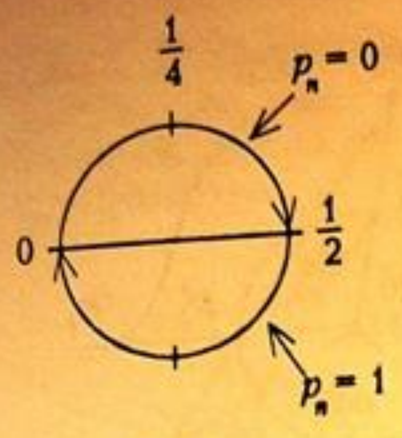


Рис.22

Если $x_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$, т.е. точка x_n лежит на верхней полуокружности, то $p_n = 0$; если x_n лежит на нижней полуокружности, то $p_n = 1$.

а) Построим последовательности p_n, в которых встречаются все слова длиной 4, начинающиеся с нуля. Таких слов восемь. Остальные восемь слов можно получить заменой (a, b) на $(-a, -b)$, поскольку 0 и 1 поменяются местами.

Примеры. Рассмотрим a и b, при которых $x_n = \{an+b\}$ образует правильные фигуры (см. таблицу).

Правильные фигуры	a	b	нужные слова из $p_n = [2x_n]$
Восьмиугольник	1/8	0	0000,0001,0011,0111
Квадрат	1/4	0	0110
Отрезок	1/2	0	0101
Треугольник	1/3	0	0010, 0100

б) Докажем, что слово 00010 не реализуется ни при каких a и b. Действительно, если в последовательности p_n стоят три нуля подряд, — это значит, что в последовательность $\{an + b\}$ три точки подряд лежат на верхней полуокружности $[0; 1/2)$. Следовательно, $\{a\} < 1/4$.

С другой стороны, если встречается слово 010, — это значит, что точки $\{an+b\}$ «проскакивают» нижнюю полуокружность за два шага, т.е. соседние точки отстоят друг от друга больше, чем на четверть окружности. Следовательно, $\{a\} > 1/4$. Полученное противоречие доказывает, что слово 00010 не реализуется.

Замечание. Последовательность p_n состоит из блоков подряд идущих одинаковых символов. При этом количество символов в разных блоках отличается не более чем на 1. Эта задача относится к символической динамике, о чем рассказано в статье «Подкова Смейла» (Ю.Ильяшенко, А.Котова; — «Квант» №1, 1994).

10-5. Пусть m — число растений в определителе. Подсчитаем суммарное число различий между всеми парами растений по всем признакам. Число пар растений равно $\frac{m(m-1)}{2}$, и каждая пара различается не меньше, чем по 51 признаку, поэтому общее число различий $S \geq 51\frac{m(m-1)}{2}$.

Оценим S другим способом. Пусть m_i — число растений, обладающих признаком i, тогда число пар растений, которые i-й признак различает, равно $m_i(m-m_i)$, и общее число различий между растениями равно:

$$S = m_1(m-m_1)+m_2(m-m_2)+\ldots+m_{100}(m-m_{100}).$$

Заметим, что $m_i(m-m_i)=\frac{m^2}{4}-\left(\frac{m}{2}-m_i\right)^2 \leq \frac{m^2}{4}$. Поэтому $S \leq 100\frac{m^2}{4}=25m^2$. Значит, $51\cdot\frac{m(m-1)}{2} \leq S \leq 25\cdot m^2$, откуда $m \leq 51$.

Допустим, m = 51 (нечетное число), тогда получаем строгое неравенство: $m_i(m-m_i)<\frac{m^2}{4}$, и $51\frac{m(m-1)}{2} \leq S < 25m^2$, откуда $m < 51$. Противоречие. Значит, $m \leq 50$.

Комментарии. 1. Напрашивается предположение, что в хорошем определителе может быть описано 50 растений. Однако это не так. Давайте добавим к описанию растений еще один признак — четность числа имеющихся у данного растения признаков. Получим определитель, в котором для описания используется уже 101 признак, причем любые описания различаются по крайней мере по 52 признакам (если исходные описания различались только по 51 признаку, то четности числа имеющихся у этих растений признаков различны).

Действуя тем же методом, что и в решении исходной задачи, получаем: $52\frac{m(m-1)}{2} \leq S \leq 101\frac{m^2}{4}$, откуда $m \leq 34$. Итак, в новом определителе, а значит и в исходном, описано не больше 34 растений.

2. Эта задача связана с кодами, исправляющими ошибки. Вместо растений рассматриваются сообщения, а вместо описаний — последовательности из 0 и 1 заданной длины; минимальное число различий двух последовательностей называется кодовым расстоянием d (в нашей задаче $d=51$), а сам определитель называется кодом. Заметим, что если исказить любое сообщение произвольным образом, но не больше, чем в $(d-1)/2$ позициях, то его можно отличить от любого другого сообщения в коде. Именно это свойство и понимается под исправлением ошибок.

Общая задача определения максимального размера кода длиной n с кодовым расстоянием d до сих пор не решена.

Однако в теории кодов известна теорема Плоткина—Левенштейна. Она устанавливает границу для размера кода с большим кодовым расстоянием $d(2d > n)$, и утверждает, что при некотором естественном предположении есть коды соответствующего размера. В условии нашей задачи $n = 100$, $d = 51$, и решение демонстрирует оценку Плоткина для этих параметров: размер кода не превышает 34. Оказывается, что эта оценка достижима: можно придумать код из 34 сообщений.

3. Задача связана с интересным фактом из линейной алгебры: хотя для системы из попарно перпендикулярных векторов нет ограничений на число элементов (она может быть сколь угодно большой в пространстве достаточной размерности), система векторов, попарные углы между которыми больше 91°, может содержать не больше 100 элементов. Для доказательства достаточно предположить противное и установить, что квадрат суммы векторов отрицателен.

10-6. *Ответ:* максимум $OM + ON$ достигается при $\angle ACB = 135°$ и равен $\frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

Пусть D и E — остальные вершины квадрата $ABDE$ и $\gamma = \angle ACB$ (рис.23).

Тогда по теореме о средней линии треугольника из ΔACD получаем: $CD = 2OM$. Аналогично, $CE = 2ON$. Поэтому $CD + CE = 2(OM + ON)$.

На стороне BC построим во внешнюю сторону квадрат CBD_1E_1 (рис.24). Треугольники ABD_1 и CBD равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $CD = AD_1$.

В треугольнике ACD_1 две стороны известны: $AC = b$, $CD_1 = a\sqrt{2}$. Третья сторона AD_1 принимает максимальное значение, когда треугольник вырождается в отрезок. Поэтому $\max(AD_1)$

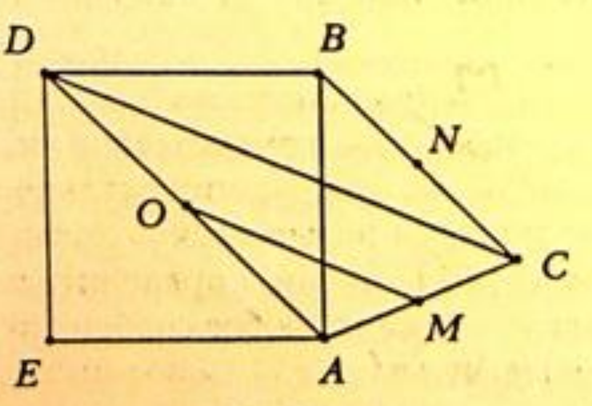


Рис.23

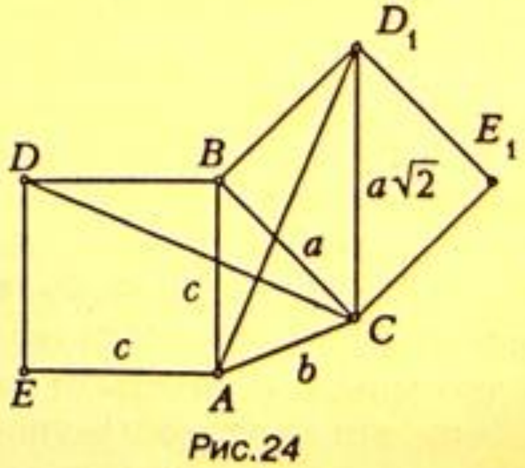


Рис.24

$= b + a\sqrt{2}$, при $\gamma = 135^\circ$. Аналогично, $\max(BE_2) = a + b\sqrt{2}$, при $\gamma = 135^\circ$.

Следовательно, $\max(OM + ON) = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

Замечание. Интересно, что площадь четырехугольника $OBCA$ максимальна при таком же значении угла $\gamma = 135^\circ$.

11 класс

11-1. Если $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ существует, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{p}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \qquad (1)$$

Выразим $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$ через p и q:

$$q = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{p}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \qquad (2)$$

Из (2) получаем, что p и q связаны между собой: либо они одновременно равны нулю, либо одновременно не равны.

1) Если $p=0$ и $q=0$, то из (1) получаем $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 0$.

При этом надо проверить, что знаменатель в (1) не равен нулю. !?
и Из $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta \Rightarrow 1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha > 0$.

2) Если $p \neq 0$, $q \neq 0$ и $p \neq q$, то из (2) получаем $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \dfrac{p}{q}$ и из (1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{pq}{q-p}$. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1$ и)

3) Если $p \neq 0$, $q \neq 0$ и $p=q$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ не определен ($\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

4) Если $p = 0$ или $q = 0$, но $p \neq q$, то условие задачи противоречиво.

11-2. *Ответ*: может. На рисунке 25 показано начало такого разбиения для нижней половины квадрата.

Символом 1 помечен 1 квадратик со стороной $1/2$, символом 2 помечены 2 квадратика со стороной $1/4$, символом k помечены 2^{k-1} квадратиков со стороной 2^{-k}, символом 1993 помечены 2^{1992} квадратиков со стороной 2^{-1993}.

Сумма периметров квадратиков, помеченных символом k, равна $4 \cdot 2^{-k} 2^{k-1} = 2$. Следовательно, сумма периметров всех помеченных квадратиков равна $2 \cdot 1993$, что больше, чем 1993.

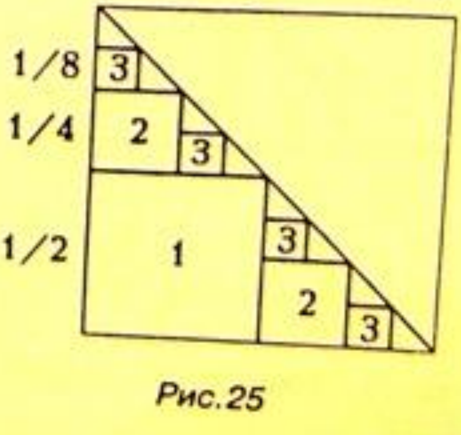


Рис.25

Замечания. 1. Формулировку задачи можно усилить. Существует разбиение квадрата на квадратики такое, что сумма периметров квадратиков, имеющих общую внутреннюю точку с диагональю квадрата, больше 1993.

2. Эта задача возникла на лекции известного математика Н.Н.Лузина, когда он захотел короче доказать теорему Коши (он любил импровизировать). Н.Н.Лузин предположил, что кривая ограниченной длины, содержащаяся в единичном квадрате, может пересечь квадратики разбиения только ограниченного суммарного периметра. Будущий академик А.Н.Колмогоров слушал эту лекцию и вскоре построил контрпример.

11-3. Укажем расположение точек, при котором будет ровно n направлений, — это набор вершин правильного n-угольника. Докажем, что направлений сторон и диагоналей столько же, сколько осей симметрии, т.е. n (кроме случаев $n=1$ и $n=2$, когда направлений $n-1$.)

Поставим в соответствие каждой стороне и диагонали ее серединный перпендикуляр, — это ось симметрии. У параллельных сторон и диагоналей серединные перпендикуляры совпадают. Верно и обратное: для каждой оси симметрии найдется перпендикулярная ей сторона или диагональ. Далее рассмотрите два случая: n нечетное и n четное.

$n \geq 3$ Теперь докажем, что для n точек *общего положения* (любые три точки образуют треугольник) всегда найдутся n различных направлений. Легко найти $n-1$ направлений (возьмем произвольную точку и все прямые, через нее проходящие, рис.26). Труднее найти еще одно.

Выберем среди данных точек крайнюю. Для этого рассмотрим их выпуклую оболочку (т.е. минимальный выпуклый многоугольник, содержащий эти точки). Пусть O — вершина многоугольника, A и B — соседние с ней вершины. Тогда все прямые, соединяющие O с остальными точками, проходят внутри угла AOB. Прямая AB пересекает их все и задает n-е направление.

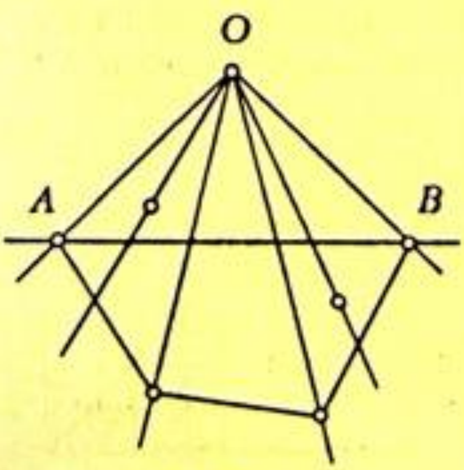


Рис.26

Замечание. Условие общего положения точек нельзя заменить на более слабое: «не все точки лежат на одной прямой». Например, вершины правильного $(n-1)$-угольника и его центр задают $n-1$ направление.

11-4. Пусть в ящиках лежат все наборы камней от 1 до n.

1) Если выбран делитель k, то после хода в ящиках останутся все

наборы камней от 1 до некоторого числа (докажите). Обозначим его $f(n,k)$.

2) Если $n = qk + k - 1$, то $f(n,k) = q+k-1$; если $n < qk + k - 1$, то $f(n,k) = q + k - 2$.

3) Объединим две формулы в одну:

$$f(n,k) = [(n+1)/k]+k-2.$$

4) Найдем оптимальное значение k (при котором $f(n,k)$ достигает минимума). Для этого докажем, что $f(n,k)$ не возрастает при $k \le \left[\sqrt{n+1}\right]+1$ и не убывает при $k \ge \left[\sqrt{n+1}\right]+1$. Отсюда будет следовать, что минимум $f(n,k)$ по k достигается при $k=\left[\sqrt{n+1}\right]+1$.

Для этого рассмотрим разность

$$f(n,k-1)-f(n,k) = [(n+1)/(k-1)]-[(n+1)/k]-1.$$

Воспользуемся свойствами целой части:

если $a-b \ge 1$, то $[a]-[b] \ge 1$, а если $a-b \le 1$, то $[a]-[b] \le 1$.

Чтобы $f(n,k)$ не возрастала, достаточно, чтобы

$$(n+1)/(k-1)-(n+1)/k \ge 1 \Rightarrow k(k-1) \le n+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{k^2-k} \le \sqrt{n+1} \Rightarrow \left[\sqrt{k^2-k}\right] \le \left[\sqrt{n+1}\right] \Rightarrow k-1 \le \left[\sqrt{n+1}\right].$$

Итак, $f(n,k)$ не возрастает до $k=\left[\sqrt{n+1}\right]+1$. Аналогично доказывается, что $f(n,k)$ не убывает от $k=\left[\sqrt{n+1}\right]+1$. Поэтому

$$f(n)=f\left(n,\left[\sqrt{n+1}\right]+1\right)=\left[\frac{n+1}{\left[\sqrt{n+1}\right]+1}\right]+\left[\sqrt{n+1}\right]-1.$$

5) Для решения задачи остается вычислить $f(f(f\ldots f(n)\ldots))$. При n=460 способ игры показан ниже в таблице. Из доказанного следует, что в каждом непустом ящике после пятого хода останется 1 камень.

Ход	1	2	3	4	5	
n	460	40	10	4	2	1
k	21	6	3	2	2	

При $n=461$ из доказанного следует, что если в ящиках содержатся все наборы камней от 1 до 461, то после первого хода останутся все наборы от 1 до 41, после второго — все наборы от

1 до 11, затем от 1 до 5, от 1 до 3 и от 1 до 2. Итак, при $n \leq 461$ не всегда можно оставить 1 камень во всех ящиках.

Комментарий. Задача возникла у программистов при разработке текстового редактора. Нужно было так упаковать текст, чтобы оставить между словами ровно один пробел. При этом применялась следующая операция: выбиралось число k и каждая группа из k пробелов подряд по очереди заменялась на 1 пробел.

11-5. а) Таких функций можно придумать несколько, см. рисунки 27 и 28. Условие $f(f(x)) = -x$ означает, что график фунции $f(x)$ переходит в себя при повороте на 90°.

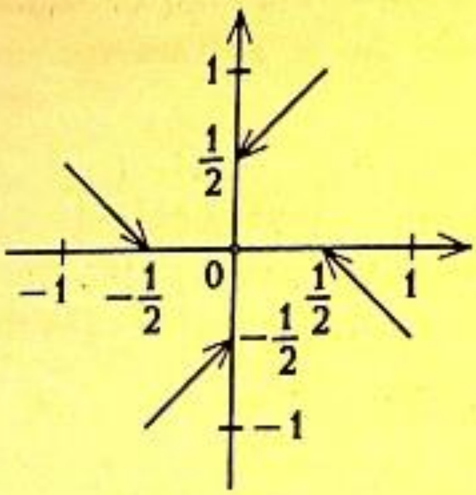


Рис.27

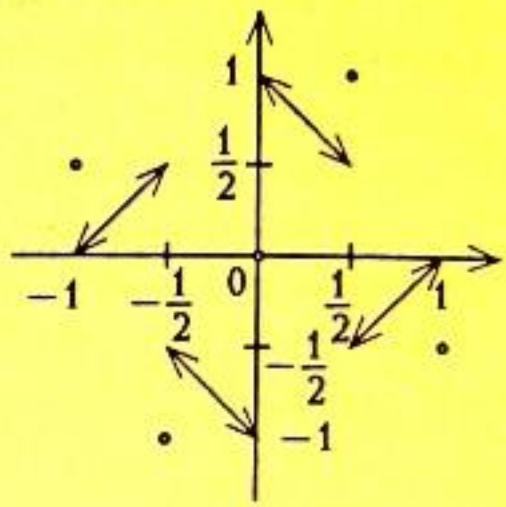


Рис.28

б) Докажем, что такой функции f не существует. Допустим, она существует.

Обозначим через $g \circ h$ композицию функций, т.е. $g \circ h(x) = g(h(x))$. Например: $f \circ f(x) = -x$ по условию.

Лемма 1. Пусть g — обратимая функция и $f \circ f(x) = g(x)$, тогда f — обратима.

Лемма 2. Пусть $f \circ f(x) = -x$. Тогда а) при $x \neq 0$ все числа x, $f(x)$, $f \circ f(x)$, $f \circ f \circ f(x)$ различны; б) $f(0) = 0$.

Теперь все готово, чтобы перейти к существу дела. Отметим координаты x и y концов интервалов и изолированных точек графика, а также их образы при последовательном применении функции f. Еще отметим 0. Мы получим множество точек, симметричное относительно 0, разбивающее интервал $(-1; 1)$ на части — интервальчики, которые функция f переставляет: образ каждого такого интервальчика есть целиком другой интервальчик.

В самом деле, образ интервальчика не может содержать отмеченных точек, поскольку прообраз любой отмеченной точки — снова отмеченная точка, но, по построению, отмеченные точки не лежат на исходных интервальчиках. То же относится к прообразу интервальчика: он не может содержать отмеченных точек. Отсюда следует, что прообраз каждого интервальчика тоже принадлежит одному из интервальчиков. А это означает, что функция f отображает интервальчики друг на друга.

Заметим, что если I — интервальчик между соседними отмеченными точками, то I, $f(I)$, $f \circ f(I)$, $f \circ f \circ f(I)$ — четыре различных интервальчика. Это следует из соответствующего утверждения про точки. Кроме того, $f \circ f \circ f \circ f(I) = I$.

Поскольку множество $\{I, f(I), f \circ f(I), f \circ f \circ f(I)\}$ симметрично относительно нуля, то интервал $(0;1)$ разбит четным числом отмеченных точек на четное число интервальчиков. Но это невозможно, так как четным числом точек интервал разбивается на нечетное число частей. Задача решена.

Замечания. 1. Возможность существования такой функции на отрезке связана с тем, что одна из отмеченных точек может попасть в конец отрезка, и тогда с четностью будет все в порядке.

2. Функция f переводит интервальчики, где она возрастает, в интервальчики, где она убывает, и наоборот, поскольку $-x = f \circ f(x)$ — убывающая функция.

3. Фактически мы решали задачу для произвольных функций, имеющих конечное число точек разрыва. Решение проходит и для функций, имеющих конечное число участков монотонности.

4. Общее утверждение таково. Пусть $g(x)$ — монотонно убывающая функция на всей числовой прямой. Тогда не существует в классе функций с конечным числом точек разрыва такой функции f, что $f(f(x)) = g(x)$.

11-6. *Ответ*: длина кратчайшего пути равна $\frac{4}{\sqrt{10}}$ м. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ и четырехугольник $EFGH$, вершины которого последовательно расположены на гранях ABC, BCD, DAB, ACD (рис.29).

Проведем через DC плоскость, перпендикулярную AB (плоскость симметрии тетраэдра $ABCD$) и рассмотрим четырехугольник $E_1F_1G_1H_1$, симметричный $EFGH$ относительно этой плоскости. (Вершины E_1 и G_1 останутся на тех же гранях, что E и G соответственно, F_1 попадет на одну грань с H, а H_1 на одну грань с F.) Периметры четырехугольников $EFGH$ и $E_1F_1G_1H_1$ равны.

Лемма. Рассмотрим пространственный четырехугольник $KLMN$ (рис.30). Пусть P и Q — середины KL и MN.

Тогда

$$PQ \le \frac{1}{2}(KN + LM).$$

Док. Пусть R – середина LN, тогда $PR \le \frac{1}{2}KN$, $QR \le \frac{1}{2}LM$.

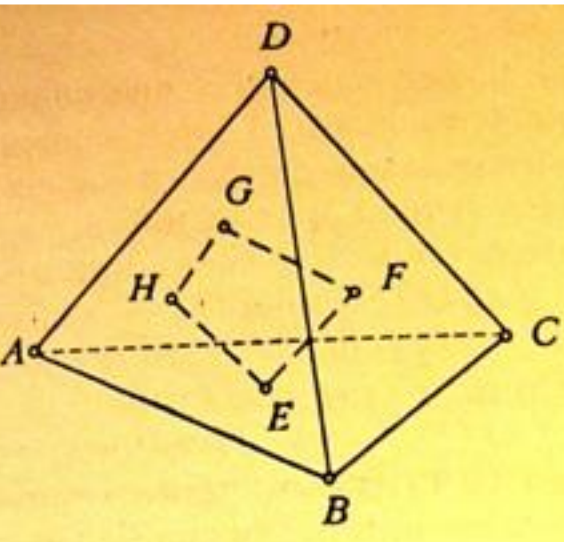


Рис.29

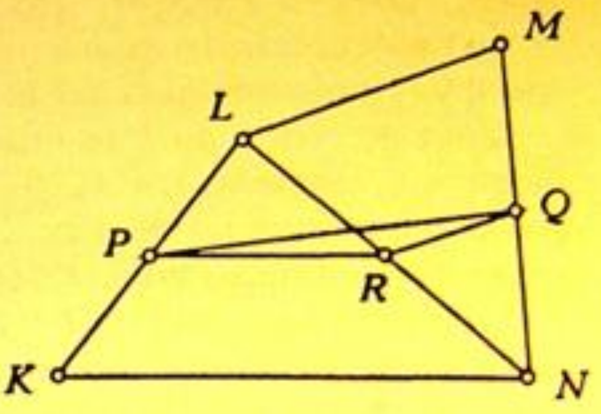


Рис.30

Обозначим через E_2, F_2, G_2 и H_2 середины отрезков EE_1, FH_1, GG_1 и HF_1. По лемме периметр $E_2F_2G_2H_2$ не больше периметра $EFGH$. Кроме того, вершины E_2 и G_2 (середины EE_1 и GG_1) будут лежать в плоскости симметрии тетраэдра, проходящей через CD, т.е. на медианах граней ABC и ABD, проведенных к AB.

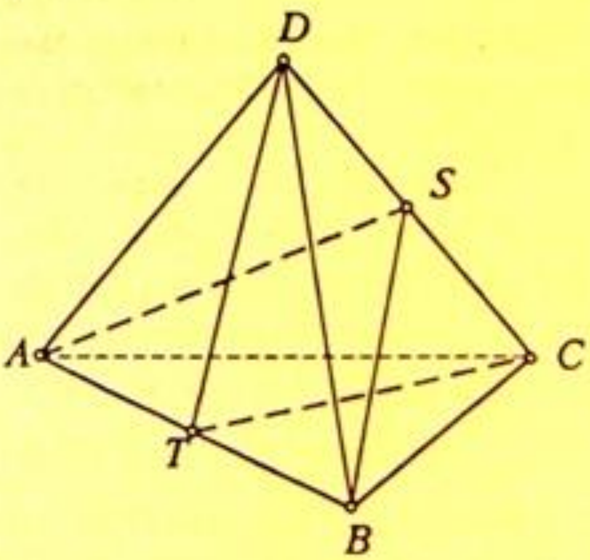


Рис.31

Обозначим середину ребра AB через T (рис.31). Исходя из $E_2F_2G_2H_2$, точно так же построим сначала $E_3F_3G_3H_3$, симметричный ему относительно плоскости симметрии тетраэдра, проходящей через AB, а затем, взяв середины отрезков, соединяющих вершины этих четырехугольников, лежащих в одной грани, получим $E_4F_4G_4H_4$, все вершины которого лежат в объединении двух плоскостей симметрии тетраэдра $ABCD$, проходящих через CD и AB. Иными словами, вершины E_4 и G_4 лежат на медианах граней ABC и ABD, проведенных к AB, а вершины F_4 и H_4 — на медианах граней CDB и CDA, проведенных к CD. Обозначим эти медианы AS и BS. При этом периметр $E_4F_4G_4H_4$ не превосходит периметра $EFGH$. Значит, периметр $EFGH$ не превосходит $4d$, где d — расстояние между CT и BS.

Взяв же четырехугольник $E_0F_0G_0H_0$ таким, что его стороны E_0F_0, F_0G_0, G_0H_0 и H_0E_0 являются общими перпендикулярами соответственно к CT и BS, BS и DT, DT и AS, AS и CT, мы получим четырехугольник с периметром $4d$.

Итак, мы доказали, что наименьший периметр четырехугольника $EFGH$ равен $4d$, где d – расстояние между CT и BS. Найдем d.

Проведем через AB плоскость, перпендикулярную CT, и спроецируем на нее наш тетраэдр. Получим треугольник ABD' (рис.32), в котором $AB=1$, $D'T=$ $=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Точка S перейдет в S' – середину $D'T$. Искомое расстояние d равно расстоянию от точки T $(=C')$ до прямой BS' (поскольку общий перпендикуляр параллелен плоскости проекции).

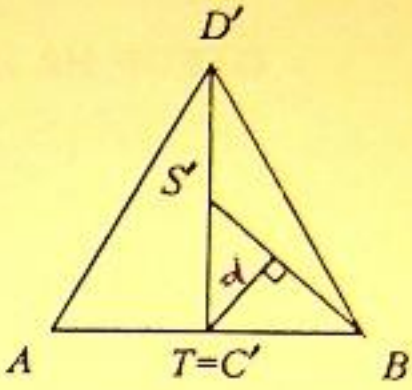


Рис.32

В прямоугольном треугольнике BTS' известны катеты $BT=$ $=\frac{1}{2}$, $TS'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Значит, $BS'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$; $d=\frac{BT\cdot TS'}{BS'}=\frac{1}{\sqrt{10}}$ м.

Комментарий. Известна аналогичная задача для плоскости: жук ползает внутри треугольника со сторонами a, b, c. Какое наименьшее расстояние он может проползти, чтобы побывать на каждой стороне и вернуться в исходную точку?

Оказывается, что кратчайший путь в случае остроугольного треугольника соединяет основания высот треугольника, а в случае прямо- или тупоугольного вырождается в двойной отрезок высоты.

ОТБОР НА ВСЕРОССИЙСКУЮ ОЛИМПИАДУ 1993 ГОДА

9 класс

9-1. Синие точки A, B и C расположены в вершинах правильного треугольника. За один ход разрешается покрасить в синий цвет

а) середину любого отрезка с концами в синих точках. Можно ли за несколько ходов покрасить в синий цвет центр треугольника ABC?

б) конец любого отрезка, у которого другой конец и середина уже синие. Можно ли за несколько ходов покрасить в синий цвет точку, симметричную точке C относительно отрезка AB?

9-2. В правильный 10-угольник вписаны два квадрата. Докажите, что они равны. (Квадрат считается вписанным, если все его вершины лежат на границе 10-угольника).

9-3. На плоскости проведены n прямых общего положения (любые три образуют треугольник), $n \geq 3$. Эти прямые разбивают плоскость на области: конечные и бесконечные. В каж-дой конечной области поставлен знак: либо «+», либо «–». За один ход разрешается в любом треугольнике, образованном нарисованными прямыми (треугольник может пересекаться другими прямыми) поменять все знаки на противоположные. Всегда ли можно за несколько ходов все знаки сделать плю-сами?

9-4. При каких n существует замкнутая ломаная на плоскости с длинами звеньев $1, 2, \ldots, n$ (именно в таком порядке), у которой любые два соседних звена перпендикулярны?

9-5. В треугольнике ABC вершины A и C, центр вписанной окружности и центр описанной окружности лежат на одной окружности. Найдите $\angle B$.

9-6. Для положительных чисел $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$ докажите неравенство:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \leq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}.$$

Задачи предложили: С.Шалунов (1), Н.Седракян (2), А.Канель-Белов (3), А.Спивак (4), И.Шарыгин (5), Л.Курляндчик (6)

10 класс

10-1. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость контуры 1993 треугольников? (Постройте пример и докажите, что число частей нельзя увеличить.)

10-2. На доске написано несколько чисел. За один ход можно стереть любое количество чисел и записать вместо них их среднее арифметическое. Процесс закончится, когда останется одно число.

Как нужно играть, чтобы последнее число было максимальным?

10-3. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — целые неотрицательные числа, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = 1$, и $a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i = 1$ для любого $i \in [1; n-1]$. Докажите, что при $n > 2$ найдется такое i, что $a_i = b_i = 1$.

10-4. См. задачу 9-2.

10-5. Для неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n > 2$ докажите неравенство:

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n} + \frac{1}{n}\sum_{i<j}\left|x_i - x_j\right| \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

10-6. Пусть $P(x) = x^2 + x + 1$. Докажите, что существует бесконечно много таких $n \in \mathbf{N}$, что $P(1)P(2)\ldots P(n-1)P(n)$ не делится на $P(n+1)$.

Задачи предложили: А.Канель-Белов (1,6), А.Галочкин (2), С.Анисимов и Л.Полякова (3), Н.Седракян (4), Г.Кондаков (5)

11 класс

11-1. См. задачу 10-1.

11-2. См. задачу 10-3.

11-3. Центры двух правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают, а вершины не совпадают. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо параллельны, либо пересекаются в одной точке, либо их точки пересечения образуют правильный треугольник (вершины обозначены в произвольном порядке).

11-4. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой вместе со всеми своими производными и ограничена (по модулю). Докажите, что существует точка, в которой 56-я производная функции $f(x)$ равна нулю.

11-5. На листе клетчатой бумаги нарисован квадрат размерами 1992×1992, стороны которого идут по линиям сетки. Докажите, что можно отметить 1993 узла сетки так, чтобы никакая прямая не содержала более двух отмеченных точек.

11-6. При каких n можно построить пространственную замкнутую ломаную с длинами звеньев 1, 2, ..., n (именно в таком порядке), у которой любые три последовательных звена попарно перпендикулярны? (За номером n следует номер 1.)

Задачи предложили: А.Канель-Белов (1), С.Анисимов и Л.Полякова (2), И.Шарыгин (3), А.Шапиро (4), Д.Митькин и А.Канель-Белов (5), А.Спивак (6)

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

9 класс

9-1. *Ответ:* а) нельзя; б) нельзя.

а) Рассмотрим проекции синих точек на одну из высот треугольника. Примем длину высоты за единицу, а основание высоты – за начало координат. Центр треугольника получит координату $1/3$. Заметим, что координата середины любого отрезка есть полусумма координат его концов. Исходные синие точки имеют координаты 0 и 1. Поэтому координата любой синей точки будет рациональным числом со знаменателем – степенью двойки. Однако $1/3$ не является степенью двойки, поэтому центр покрасить нельзя.

б) *Вариант 1.* Можно заметить, что синие точки образуют узор из правильных треугольников и шестиугольников (рис.33). Этот узор центрально симметричен относительно любого узла. Поскольку центры шестиугольников не лежат в узлах, нам достаточно доказать, что все синие точки лежат в узлах. Иначе говоря, если две синие точки лежат на узоре, то новая точка тоже лежит на узоре. Действительно, новая точка является образом одной из этих точек при центральной симметрии относительно другой, поэтому она принадлежит узору. Следовательно, центры шестиугольников покрасить нельзя и заданную точку тоже.

Вариант 2. Рассмотрим две прямые, проходящие через две стороны исходного треугольника. Синие точки будем проецировать на каждую из этих прямых параллельно другой прямой. Получим косоугольную систему координат (рис.34).

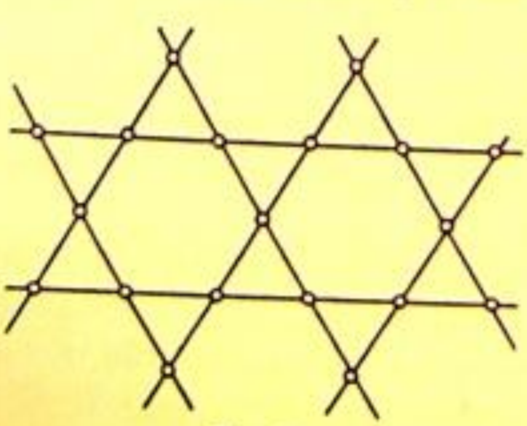


Рис.33

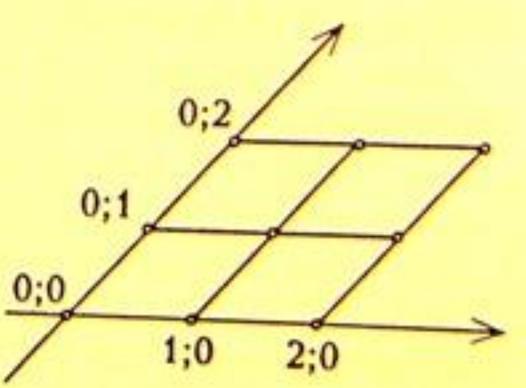


Рис.34

Заметим, что точки исходного треугольника имеют хотя бы одну четную координату, а точка, в которую надо попасть, — обе нечетные координаты. Докажем, что каждая синяя точка имеет хотя бы одну четную координату. В самом деле, если две синие точки имели координаты $(a,\ b)$ и (c,d), то новая точка будет иметь координаты $(2c-a,\ 2d-b)$. И если одно из чисел a, b четное, то одно из чисел $2c-a$, $2d-b$ тоже четное. Значит, две нечетные координаты получить нельзя.

9-2. Докажем, что центр квадрата совпадает с центром 10-угольника. Допустим, что это не так. Сделаем центральную симметрию рисунка относительно центра квадрата. Квадрат перейдет в себя, а с 10-угольником произойдет параллельный перенос вдоль линии центров. Исходный и перенесенный 10-угольник могут иметь, самое большее, два общих параллельных отрезка сторон. В этом пересечении должны лежать все вершины квадрата, что невозможно (хотя для прямоугольника это возможно). Итак, центры совпадают.

Повернем картинку на 90° вокруг общего центра. Квадраты перейдут в себя, а 10-угольник пересечет свой образ в 20 точках — вершинах правильного 20-угольника. Вершины квадратов лежат в вершинах этого 20-угольника и, следовательно, равноудалены от его центра. Итак, квадраты равны.

Замечание. Ключевым является тот факт, что для правильного четноугольника центральная симметрия относительно любой точки эквивалентна параллельному переносу. Например, правильные треугольники, вписанные в квадрат, могут иметь разные центры и разные размеры.

9-3. *Ответ*: можно всегда. Достаточно доказать, что можно поменять все знаки в любом k-угольнике, не изменив знаки вне него. Применим индукцию. При $k = 3$ доказывать нечего. Если $k > 3$, то найдутся два соседних внутренних угла k-угольника, сумма которых больше 180°. (Если бы сумма была меньше, то сумма двух внешних углов была бы больше 180°, а сумма четырех внешних углов — больше 360°, но сумма всех внешних углов равна 360°.) Продолжения соответствующих сторон пересекаются и образуют треугольник, примыкающий к исходному k-угольнику (рис. 35).

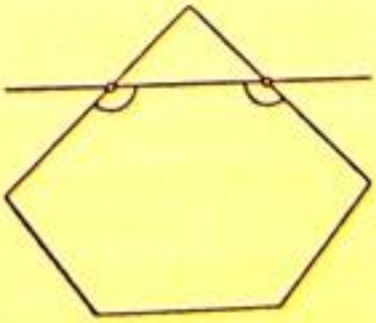


Рис.35

В результате добавления этого треугольника мы получим $(k-1)$-угольник. По предположению индукции можно поменять все знаки только внутри этого многоугольника. Поменяем все эти знаки, а затем поменяем знаки внутри добавленного треугольника. Тем самым мы поменяли все знаки внутри k-угольника и только в нем. Задача решена.

Замечания. 1. Задача допускает пространственное обобщение для плоскостей общего положения и тетраэдров.

2. Задача возникла из горного дела: требовалось быстро вычислять объемы разных многогранных тел, чьи грани заданы некоторой системой плоскостей. Идея состояла в дополнении тела тетраэдрами до тетраэдра и применением соображений включения-исключения.

9-4. *Ответ:* n делится на 8. Выберем оси координат параллельно звеньям ломаной. Поскольку звенья, параллельные оси Ox, чередуются со звеньями, параллельными оси Oy, то n — четное число, $n=2k$. Поскольку проекции звеньев, параллельных одной оси, тоже образуют замкнутую ломаную, то получаем переформулировку задачи: имеется два ряда чисел:

$$1,\ 3, \ldots,\ 2k-1$$

$$2,\ 4, \ldots,\ 2k\ .$$

Выясним, при каком k можно расставить знаки «+» и «−» перед числами так, чтобы сумма чисел в каждом ряду была нулевая?

Необходимое условие состоит в том, что сумма исходных чисел в каждом ряду четная. Поскольку суммы чисел в рядах отличаются на k, то k — четное. Пусть $k=2m$. Покажем, что k делится на 4. Необходимо, чтобы $\frac{1}{2}(2+4+\ldots+2k)$ было четным, значит $(1+\ldots+2m)$ — четное, откуда $2m(2m+1)/2$ — четное, поэтому m — четное, т.е. k делится на 4.

Теперь докажем, что условие «k делится на 4» является достаточным. Для этого укажем требуемую расстановку знаков. Разобьем ряды на четверки:

$$(1-3-5+7)+(9-11-13+15)+\ldots=0,$$
$$(2-4-6+8)+(10-12-14+16)+\ldots=0.$$

Замечания. 1. Некоторые ученики решали задачу в предположении, что перпендикулярны только звенья с соседними номерами, т.е. для звеньев с номерами n и 1 перпендикулярность не предполагалась. Задача при этом усложнялась и получался дополнительный ответ $n=8k-1$. Такие решения оценивались, как полные.

2. Для случая m-мерного пространства ответ таков: n делится на $4m$.

9-5. *Ответ*: $\angle B = 60°$. Пусть O_1 — центр вписанной окружности, O_2 — центр описанной окружности, $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$. Возможны два случая: 1) O_1, O_2 лежат по одну сторону от AC (рис.36), и 2) O_1, O_2 лежат по разные стороны от AC (рис.37).

В любом случае $\angle AO_1C = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180° + \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90° + \frac{\beta}{2}$. Итак, $\angle AO_1C = 90° + \frac{\beta}{2}$.

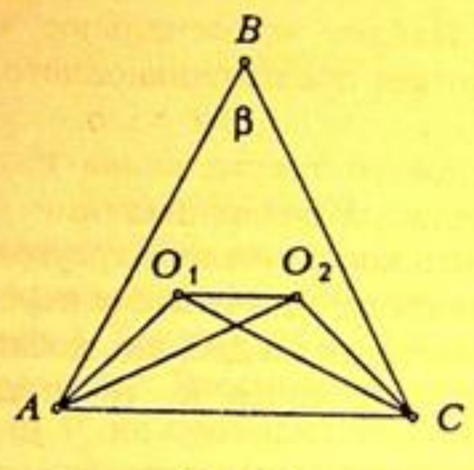


Рис.36

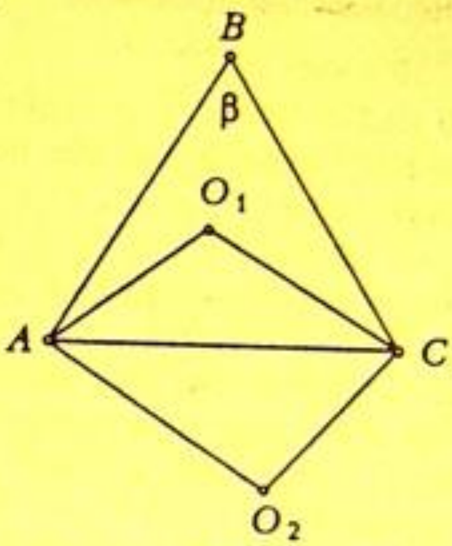


Рис.37

Случай 1. Из условия следует, что $\angle AO_1C$ и $\angle AO_2C$ вписанные и опираются на общую дугу AC. Поэтому $\angle AO_1C = \angle AO_2C$.

Для окружности, описанной около ΔABC, $\angle AO_2C$ — центральный, а угол $\angle ABC$ — вписанный, поэтому $\angle AO_2C = 2\beta$.

Из этих трех равенств получаем уравнение:

$$90° + \frac{\beta}{2} = 2\beta, \text{ откуда } \beta = 60°.$$

Случай 2. Поскольку $\angle AO_1C$ и $\angle AO_2C$ вписанные и опираются на дополняющие дуги, то $\angle AO_1C = 180° - \angle AO_2C$.

Поскольку O_1 и B лежат по одну сторону от AC, то O_2 и B лежат по разные стороны от AC. Для окружности, описанной около ΔABC, $\angle AO_2C = 2(180° - \beta)$.

Получаем уравнение

$$90° + \frac{\beta}{2} = 180° - 2(180° - \beta),$$

откуда $\beta = 180°$.

Получился вырожденный треугольник, следовательно, в этом случае решений нет.

9-6. Перенесем все члены в левую часть и выделим те, которые содержат x_n:

$$(x_{n-1}/x_n)+(x_n/x_1)-(x_n/x_{n-1})-(x_1/x_n).$$

Найдем минимум этого выражения как функции от x_n на интервале $[x_{n-1}, \infty)$. Производная на этом интервале положительна, поэтому минимум достигается на границе при $x_n = x_{n-1}$. Подставим это значение в исходное неравенство. Получим такое же неравенство для меньшего числа переменных. По индукции неравенство доказано.

10 класс

10-1. *Ответ*: $2 + 3n(n + 1)$. Найдем максимальное число частей, которое может появиться при добавлении одного треугольника.

Основная идея. Если контур нового треугольника имеет k пересечений с другими, то добавилось k новых частей.

Доказательство. Будем обходить контур нового треугольника. Отрезок или угол между двумя соседними точками пересечения разрезает некоторую часть плоскости на две, т.е. добавляет одну часть. Поскольку соседних пар точек k, то и частей добавится k.

Контуры двух треугольников пересекаются не больше, чем в шести точках (докажите).

Итак, добавление к $(n-1)$ треугольникам еще одного добавляет не больше $6(n-1)$ частей. Общее число частей будет не больше

$$2 + 6(0 + 1 + 2 +...+ (n-1)) = 2 + 3n(n-1).$$

Построим пример, когда число частей максимально. Возьмем правильный $3n$-угольник. Его вершины распадаются на тройки, каждая из которых образует правильный треугольник. Легко видеть, что любые два треугольника пересекаются по 6 точкам, и никакие точки пересечения не совпадают (так как общая часть всех треугольников есть $3n$-угольник, у которого пары сторон пересекаются в разных точках).

Замечание. Для контуров k-угольников максимальное число частей равно $2 + kn(n-1)$, а для окружностей $2 + n(n-1)$.

10-2. *Ответ:* каждым ходом надо усреднять два наименьших числа. Доказательство оптимальности алгоритма состоит из трех лемм.

Лемма 1. Пусть каждое число набора A не меньше каждого числа набора B, тогда наибольшее число, которое можно получить усреднениями из набора A, не меньше любого числа, которое можно получить из набора B (скажем, что набор B не меньше A).

Следующая лемма позволяет обойтись усреднениями только пар чисел.

Лемма 2. Если усреднить по два наименьших числа, то результат будет не меньше среднего арифметического всех чисел.

Лемма 3. Если усреднять два наименьших числа, то получится набор чисел не меньший, чем если усреднить два других числа.

10-3. *Решение 1.* Заметим, что дроби a_i / b_i убывают (при i=1 условимся, что $1/0 = +\infty$). Допустим, что $a_i / b_i \neq 1$ при всех i. Тогда найдется i, при котором $a_i / b_i > 1 > a_{i+1} / b_{i+1}$. Откуда $a_i \geq b_i + 1$; $b_{i+1} \geq a_{i+1} + 1$. Подставим эти оценки в исходное равенство и получим $(b_i+1)(a_{i+1}+1) - a_{i+1} b_i \leq 1$ или $a_{i+1} + b_i \leq 0$, откуда $a_{i+1} = 0$ и $b_i = 0$. Следовательно, i=1 и n=2. Противоречие.

Решение 2. Дадим геометрическую интерпретацию условия. На плоскости задана цепочка целочисленных векторов V_i с координатами $(a_i; b_i)$, $V_1 = (1; 0)$, $V_n = (0; 1)$. Ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах V_i, V_{i+1} равна 1. Тогда $V_i = (1; 1)$ при некотором i. Угол наклона векторов возрастает. Рассмотрим момент, когда угол переходит через 45°. Если V_i не проходит через точку (1; 1), то (1; 1) лежит внутри параллелограмма, построенного на V_i и V_{i+1}. Но площадь такого параллелограмма будет больше 1 (поскольку треугольники, построенные на векторах V_i и (1; 1) и на (1; 1) и V_{i+1}, лежат внутри параллелограмма, не пересекаются и имеют площади не меньше 1/2, а равенство достигается только при n=2).

Замечания. 1. Последовательность несократимых дробей в интервале от 0 до 1 со знаменателями не больше k, выписанная в порядке возрастания, называется *рядом Фарея* порядка k. Можно доказать, что для соседних дробей ряда Фарея a_i / b_i и a_{i+1} / b_{i+1} выполнено равенство $a_{i+1} b_i - a_i b_{i+1} = 1$. Утверждение задачи означает, что ряд Фарея, содержащий член меньший 1 и член больший 1, содержит 1.

2. Для площади многоугольника с вершинами в целых точках есть замечательная формула Пика: $m + n/2 - 1$, где m — количество целых точек внутри многоугольника, n — количество целых точек на его границе, включая вершины.

10-4. См. решение задачи 9-2.

10-5. Можно считать, что $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$. Рассмотрим на числовой прямой точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тогда все они лежат на отрезке $[x_n; x_1]$, а модули $\left| x_i - x_j \right|$ суть расстояния между ними.

Заметим, что $|x_1 - x_k| + |x_k - x_n| = x_1 - x_n$. Таких дополняющих модулей $n-2$ ($k=2,\dots,n-1$), да еще есть $|x_1 - x_n|$. Получаем оценку

$$\sum_{i<j} |x_i - x_j| \ge (n-1)(x_1 - x_n);$$

кроме того, $(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \ge x_n$, поэтому достаточно доказать, что

$$x_n + \frac{1}{n}(n-1)(x_1 - x_n) \ge \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n};$$

получаем $x_n + (n-1)x_1 \ge x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Что верно.

10-6. Достаточно доказать бесконечность множества простых делителей среди значений многочлена $P(1), P(2), \dots$ Доказательство аналогично доказательству Евклида бесконечности множества простых чисел. Допустим, что $q_1, \dots, q_k$ — полный набор простых делителей чисел $P(1), P(2), \dots$ Пусть d — свободный член многочлена, тогда $\frac{1}{d}P(q_1 \cdot \dots \cdot q_k \cdot d)$ — не делится на $q_1, \dots, q_k, d$ и, следовательно, имеет еще хотя бы один простой делитель. Противоречие.

11 класс

11-1. См. решение задачи 10-1.

11-2. См. решение задачи 10-3.

11-3. Если вершины обозначены в одинаковом порядке, то поворот картинки на 120° переводит ее в себя, поэтому точки пересечения образуют либо правильный треугольник, либо одну точку.

Если вершины обозначены в противоположном порядке, то рассмотрим два случая. Если треугольники одинакового размера, то прямые параллельны, а если разного размера, то обозначим $H = AA_1 \cap CC_1$ (рис.38). Достаточно доказать, что $H \in BB_1$.

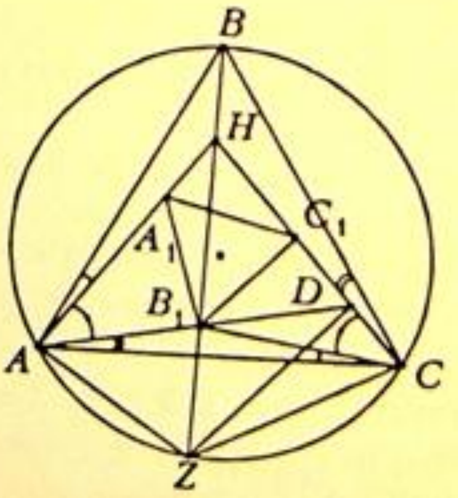


Рис.38

Выпишем ключевые соотношения, вытекающие из симметрии картинки: $\angle BAA_1 = \angle ACB_1$; $\angle BCC_1 = \angle CAA_1$; $\angle HAB_1 = \angle HCB_1$.

Пусть $AB_1 \cap CC_1 = D$, а окружности (ADH) и (CB_1D) пересекаются в точке Z.

1. Докажем, что Z лежит на окружности (ABC).

$$\angle AZD = 180^\circ - \angle AHC = \angle HAC + \angle HCA;$$

$$\angle CZD = \angle CB_1D = \angle CAB_1 + \angle ACB_1 = \angle BCH + \angle BAH;$$

$$\angle AZC = \angle AZD + \angle CZD = \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC.$$

По свойству вписанного четырехугольника Z лежит на (ABC).

2. Докажем, что $H \in B_1Z$.

$$\angle HZD = \angle HAD = \angle HCB_1 = \angle B_1ZD.$$

3. Докажем, что $B \in B_1Z$.

$$\angle BZC = \angle BAC = \angle BAB_1 + \angle CAB_1 = \angle HCA + \angle DAC =$$
$$= 180^\circ - \angle ADH = \angle B_1ZC.$$

Значит, BB_1 проходит через H, что и требовалось доказать.

11-4. Допустим, что 56-я производная не обращается в нуль. Тогда она сохраняет знак (как непрерывная функция).

Следовательно, 55-я производная — строго монотонная функция. Такая функция или на целом луче больше положительной константы, или на целом луче меньше отрицательной константы. Пусть, для определенности, 55-я производная на некотором луче, идущем вправо, больше положительной константы (остальные случаи рассматриваются аналогично).

Тогда 54-я производная на этом луче больше некоторой линейной функции с положительным старшим коэффициентом.

Тогда 53-я производная на этом луче больше некоторой квадратичной функции с положительным старшим коэффициентом.

По индукции получаем, что исходная функция на этом луче больше некоторого многочлена 55-й степени с положительным старшим коэффициентом.

Но многочлен с положительным старшим коэффициентом не может быть ограничен сверху на луче, идущем вправо. Значит и исходная функция не будет ограничена. Противоречие.

Замечание. Из доказательства следует, что все производные, начиная со второй, должны обращаться в нуль хотя бы в одной точке.

11-5. Рассмотрим точки с координатами $(x; y)$, где x пробегает числа $0, 1, 2, \ldots, 1992$, а y — остаток от деления x^2 на 1993. Заметим, что число 1993 — простое. Докажем, что никакие три точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ не лежат на одной прямой. Допустим, что есть прямая $ax + by + c = 0$, проходящая через эти точки, причем не все ее коэффициенты делятся на 1993. Получаем уравнение $ax + bx^2 + c = 0$, которое имеет три различных решения x_1, x_2, $x_3 \in [0; 1992]$. Тогда вычтем одно уравнение из другого:

$$ax_1 + bx_1^2 + c = 0;\ \ ax_2 + bx_2^2 + c = 0 \Rightarrow$$
$$(x_1 - x_2)[a + b(x_1 + x_2)] = 0 \Rightarrow a + b(x_1 + x_2) = 0,$$

аналогично

$$a + b(x_1 + x_3) = 0 \Rightarrow b(x_2 - x_3) = 0 \Rightarrow b = 0,$$

но тогда и $a = 0$.

11-6. *Ответ:* n делится на 12. См. решение задачи 9-4.

LVII МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА (1994 г.)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

6 класс

6-1. Среди четырех людей нет трех с одинаковым именем, с одинаковым отчеством или одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли так быть?

6-2. Найдите в последовательности 2,6,12,20,30,... число, стоящее а) на 6-м; б) на 1994-м месте. Ответ объясните.

6-3. Несколько одинаковых по численности бригад сторожей спали одинаковое число ночей. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем число бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 человеко-ночь?

6-4. Составьте куб $3\times3\times3$ из красных, желтых и зеленых кубиков $1\times1\times1$ так, чтобы в любом бруске $3\times1\times1$ были кубики всех трех цветов.

6-5. Разрежьте квадрат на три части, из которых можно сложить треугольник с тремя острыми углами и тремя различными сторонами.

6-6•. Вся семья выпила по одинаковой чашке кофе с молоком, причем Катя выпила четверть налитого по чашкам молока и шестую часть налитого кофе. Сколько человек в семье?

6-7•. В поход пошли 60 ребят. Среди любых десяти из них есть хотя бы три одноклассника. Обязательно ли среди ребят найдутся а) 15; б) 16 одноклассников?

6-8. Турист обошел шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую один раз. Могло ли так быть, если а) улицы могут оканчиваться тупиком; б) конец каждой улицы является перекрестком.

Задачи предложили: Д.Ботин (1,2,3,4,5,6,8), С.Токарев (7)

7 класс

7-1. За два года завод снизил объем выпускаемой продукции на 51%. При этом каждый год объем продукции снижался на одно и то же число процентов. На сколько?

7-2. Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, и на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число квартир на этаже меньше числа этажей, но больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько в доме этажей, если всего в нем 105 квартир?

а) Найдите хотя бы одно решение.

б) Найдите все решения и докажите, что других нет.

7-3. Когда Незнайку попросили придумать задачу для математической олимпиады в Солнечном городе, он написал ребус АБВ + ГДЕ = ЖЗИК. Есть ли у него решение? (Разным буквам соответствуют разные цифры).

7-4. См. задачу 6-4.

7-5. На доске размером 4×6 клеток стоят две черные фишки Вани и две белые фишки Сережи (см. рисунок 1). Каждый (по очереди) двигает любую из своих фишек на одну клетку вперед (по вертикали). Начинает Ваня. Если после хода любого из ребят черная фишка окажется между двумя белыми по горизонтали или по диагонали, она снимается с доски. Ваня хочет провести обе свои фишки из верхнего ряда доски в нижний. Может ли Сережа ему помешать?

Рис. 1

7-6*. В одной из школ 20 раз проводился кружок по астрономии. На каждом занятии присутствовали ровно 5 школьников, причем никакие 2 школьника не встречались на кружке больше одного раза. Докажите, что всего на кружке побывало не меньше 20 разных школьников.

Задачи предложили: А.Спивак (1), М.Ященко (3), Д.Ботин (4), И.Ященко (2, 5), А.Ковальджи (6)

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

6 класс

6-1. *Ответ:* может, например: А.А.А., А.В.В., В.А.В, В.В.А. (если совпадают первые инициалы — значит, совпадают имена и т.д.).

6-2. *Ответ*: а) 42, б) $1994 \cdot 1995$. Число с номером n равно $n(n+1)$.

6-3. Пусть n — число сторожей в бригаде, k — число бригад, m — число ночей, которое проспал один сторож. Тогда $m \cdot n \cdot k = 1001$. Поскольку $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ и $n < m < k$, то $n = 7$, $m = 11$, $k = 13$.

6-4. *Ответ*: на схеме показаны три слоя кубика.

к ж з	з к ж	ж з к
з к ж	ж з к	к ж з
ж з к	к ж з	з к ж

6-5. В квадрате $ABCD$ на стороне BC возьмем точку E ближе к B, чем к C. Пусть F — середина BE, G — середина EC, тогда из частей ABF, $AFGD$ и DGC можно составить нужный треугольник.

6-6. *Ответ:* 5 человек. Пусть m — объем молока, k — объем кофе, n — численность семьи. Примем объем чашки за 1, тогда

$$m + k = n,$$

$$m/4 + k/6 = 1 \Rightarrow 3m + 2k = 12 \text{ или } m + 2n = 12,$$

откуда видно, что m — целое число, и k тоже. Заметим, что m делится на 2, а k делится на 3. Получим

$$m/2 + k/3 = 2.$$

Поскольку оба слагаемых положительные и целые, то $m = 2$, $k = 3$.

6-7. *Ответ*: а) да, б) нет. Назовем группу одноклассников классом. Для пункта б) приведем пример: четыре класса по 15 человек в каждом. Для пункта а) будем рассуждать от противного. Допустим, что в каждом классе меньше 15 ребят, тогда классов больше четырех. Составим компанию так: если в классе больше одного человека, то возьмем из него двоих, а если в классе один человек, то его и возьмем. В этой компании не меньше 10 человек, но нет троих одноклассников. Противоречие.

6-8. *Ответ*: а) да. Например, все улицы прямые и выходят из одной точки. б) да. Например, три улицы образуют правильный треугольник, и еще три улицы соединяют центр треугольника с его вершинами. Докажем, почему эти улицы нельзя обойти по одному разу (этого не требовалось от школьников). На каждом перекрестке сходятся ровно три улицы. Если мы не начинали движение с некоторого перекрестка, то по одной из дорог мы в него придем, по другой — уйдем, а по третьей — опять придем, но уйти уже не сможем, потому что по всем дорогам уже ходили. Значит, этот перекресток будет концом пути. Но перекрестков у нас 6. Один из них может быть началом, а остальные 5 должны быть концами, что невозможно.

Замечание. Это знаменитая теорема Эйлера о том, что нельзя нарисовать одним росчерком пера картинку, на которой есть больше двух «перекрестков», из которых выходит нечетное число линий.

7 класс

7-1. *Ответ*: на 30% в год. Пусть ежегодно выпуск продукции снижался на $x\%$. Примем исходный объем за 1, тогда через год будет выпущено $1-x/100$, а через два года $(1-x/100)^2$. С другой стороны, выпуск составил 0,49.

7-2. *Ответ*: 7 этажей. Пусть k — число подъездов, m — число квартир, n — число этажей, тогда $kmn = 105$. Поскольку $105 = 3\cdot5\cdot7$, и это единственное разложение на три множителя, больших 1, то $k = 3$, $m = 5$, $n = 7$.

7-3. *Ответ*: есть, например, $759 + 843 = 1602$. Можете ли вы, глядя на это решение, придумать еще несколько?

7-4. *Ответ*: можно, см. решение задачи 6-4.

7-5. *Ответ*: Ваня сможет провести свои фишки. Крайняя черная фишка всегда пройдет. Пусть ходит другая черная фишка. Допустим, что черная фишка может оказаться между двумя белыми. Тогда ей останется число ходов равное полусумме ходов сделанных белыми фишками. Если это произошло после хода Вани, то фишка прошла вдвое большее расстояние, чем ей осталось. Тогда длина пути черной фишки должна делится на 3, что неверно. Если это произошло после хода Сережи, то длина пути черной фишки при делении на 3 должна давать в остатке 1, что неверно. Противоречие.

7-6. На всех занятиях присутствовали разные пары школьников. На каждом занятии присутствовало ровно 10 пар школьников. Всего различных пар должно быть не меньше 200. С другой стороны, если всего на кружке побывало n школьников, то из них можно составить не больше $n(n-1)/2$ пар. Получаем неравенство $n(n-1)/2 \geq 200$. Отсюда $n \geq 20$.

ШКОЛЬНЫЙ ТУР

5 класс

5-1. Пять мальчиков делают 5 самолетиков за 5 минут. Сколько мальчиков сделают 10 самолетиков за 10 минут? (Объясните, как вы рассуждали.)

5-2. Геологи нашли 19 самородков массами 1 кг, 2 кг, ..., 19 кг. Как разложить эти самородки по 10 рюкзакам так, чтобы в каждом был одинаковый груз?

5-3. Средний возраст 11 игроков футбольной команды 22 года. Когда одного игрока удалили с поля, средний возраст оставшихся игроков стал 21 год. Сколько лет удаленному игроку?

5-4. Цена билета на стадион была 150 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько снизили цену билета?

5-5. Напишите в строку пять чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была отрицательной, а сумма всех чисел положительной.

Задачи предложили: А.Ковальджи (1, 2, 3, 4), Ю.Раскин (5)

6 класс

6-1. В стаде 8 овец. Первая съедает копну сена за 1 день, вторая – за 2 дня, третья – за 3 дня, ..., восьмая – за 8 дней. Кто быстрее съест копну сена: две первые овцы или все остальные вместе?

6-2. В начале забега вперед вырвался Антон, вторым шел Борис, а третьим – Виктор. За время бега Антон и Борис менялись местами 8 раз, Борис и Виктор – 7 раз, Антон и Виктор – 6 раз. В каком порядке прибежали спортсмены? (Объясните почему).

6-3. Выпишите натуральные числа от 1 до 100 в строку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50.

6-4. В классе послушных девочек столько же, сколько непослушных мальчиков. Кого в классе больше: послушных детей или мальчиков?

6-5. Придумайте натуральное число, которое делится на 1994 и сумма его цифр тоже делится на 1994.

Задачи предложил А.Ковальджи

7 класс

7-1. Сосчитайте: $1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-\ldots+301$.

7-2. Старший брат говорит младшему: «Когда мне было столько лет, сколько тебе сейчас, то я был втрое старше тебя, а когда тебе будет столько лет, сколько мне сейчас, то нам вместе будет 60 лет». Сколько лет братьям?

7-3*. На плоскости отмечено 6 точек и несколько прямых так, что через каждые две отмеченные точки проходит отмеченная прямая, и через каждую отмеченную точку проходит ровно три отмеченные прямые. Придумайте такое расположение точек.

7-4. Докажите, что если $a=b+1$, то

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\ldots(a^{32}+b^{32})=a^{64}-b^{64}.$$

7-5. В коробке есть карандаши разного цвета, разного размера и разной толщины. Придумайте такой набор карандашей, чтобы у любых двух из них совпадал ровно один признак (цвет, размер или толщина).

Задачи предложил: А.Ковальджи

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

5 класс

5-1. *Ответ*: те же 5 мальчиков. За каждые 5 минут они делают 5 самолетиков.

5-2. *Ответ*: 19, 18+1, 17+2, ..., 10+9.

5-3. *Ответ*: 32 года. Сумма возрастов игроков была $11 \cdot 22 = 242$, а после удаления игрока стала $10 \cdot 21 = 210$.

5-4. *Ответ*: 125 р. Пусть n — исходное число посетителей, x — новая цена билета. Составим уравнение для сбора денег: $x \cdot 1{,}5n = 150n \cdot 1{,}25$.

5-5. *Ответ*: 3, −4, 3, −4, 3.

6 класс

6-1. *Ответ*: две первые овцы быстрее. Скорость поедания у двух первых овец $1+1/2$, а у всех остальных $1/3+1/4+$ $+1/5+1/6+1/7+1/8$. Ясно, что $1/3+1/4+1/5 < 1/3+$ $+1/3+1/3=1$, и $1/6+1/7+1/8 < 1/6+1/6+1/6 = 1/2$.

6-2. *Ответ*: первый — Антон, второй — Виктор, третий — Борис. Антон и Борис менялись местами четное число раз, поэтому Антон остался впереди Бориса. Антон и Виктор менялись местами четное число раз, поэтому Антон остался впереди Виктора. Борис и Виктор менялись местами нечетное число раз, поэтому Виктор пришел впереди Бориса.

6-3. *Ответ*: 50,100,49,99,48,98,47,97,...,2,52,1,51. Числа 50 и 51 должны стоять по краям, а остальные числа — чередоваться: то больше, то меньше предыдущего.

6-4. Разделим детей на две группы: в первой — мальчики, во второй — девочки. Затем непослушных мальчиков переведем во вторую группу, а послушных девочек — в первую. Численности групп от этого не изменятся. Но в первой группе будут все послушные дети, поэтому послушных детей столько же, сколько мальчиков.

6-5. *Ответ*: 19941994...1994 (цифры 1994 повторяются 1994 раза).

7 класс

7-1. *Ответ*: 1. Разобьем числа на четверки, начиная с двойки. Получится 75 четверок. В каждой четверке сумма равна нулю.

7-2. *Ответ*: 15 и 25 лет. Пусть нынешние возрасты братьев C и M. Старшему было столько, сколько младшему, $C-M$ лет назад. Тогда младшему было $M-(C-M)=2M-C$. Получаем уравнение $M=3(2M-C)$. Младшему будет столько лет, сколько старшему, через $C-M$ лет. Тогда старшему будет $2C-M$ лет. Получаем уравнение $C+(2C-M)=60$.

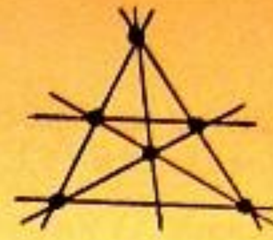


Рис.2

7-3. *Ответ*: например, как на рисунке 2.

7-4. Воспользуемся несколько раз формулой для разности квадратов.

$$a^{64}-b^{64}=(a^{32}+b^{32})(a^{32}-b^{32})=(a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})(a^{16}-b^{16})=$$
$$=(a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})\ \ldots(a+b)(a-b).$$

Последнее выражение отличается от исходного множителем $(a-b)$, который равен 1.

7-5. *Ответ*: *АБА, ААБ, БАА, БББ*. Закодируем карандаши тремя буквами, где первая буква — это цвет, вторая — размер, третья — толщина (например, *БББ* может означать: белый, большой, бревна толще).

ОКРУЖНОЙ ТУР

8 класс

8-1. Лыжник рассчитал, что если он будет проходить в час 10 км, то прибудет на турбазу на час позже срока, а если будет бежать со скоростью 15 км / ч, то прибудет на час раньше срока. С какой скоростью ему надо бежать, чтобы прибыть точно в срок?

8-2. Отметьте на координатной плоскости множество точек $(x;\ y)$, удовлетворяющих уравнению $|x-1|+|y|=2$.

8-3. В классе 33 ученика, а сумма их возрастов 430 лет. Докажите, что в классе найдутся 20 учеников, сумма возрастов которых больше 260 лет.

8-4. В треугольнике ABC точка D делит BC в отношении $BD:DC=1:3$, а точка O делит AD в отношении $AO:OD=5:2$. В каком отношении прямая BO делит отрезок AC?

8-5. На одном первобытном базаре шкура мамонта обменивалась на две шкуры тигра, а юбка из павлиньих перьев — на три копья. На другом базаре, который находился в одном дне пути от первого, шкура мамонта обменивалась на три юбки, а шкура тигра — на четыре копья. Охотник принес на базар шкуру мамонта и хочет выменять ее на четыре тигровых шкуры. Успеет ли он это сделать за 33 дня?

Задачи предложили: А.Ковальджи (1,3,4), И.Шарыгин (2), В.Ковальджи (5)

9 класс

9-1. Найдите все трехзначные числа, цифры которых составляют арифметическую прогрессию, причем первая цифра делится на три, а все число делится на 5.

9-2. Три одинаковые банки с тремя красками наполнены на две трети. Имеется возможность переливать любую часть жидкости из одной банки в другую. Как сделать во всех банках одинаковую смесь? (Другой посуды нет и выливать краску нельзя.)

9-3. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты: на катетах во внешнюю сторону, а на гипотенузе во внутренюю. Докажите, что центры квадратов и вершина треугольника лежат на одной прямой.

9-4. Известно, что $a+b+c>0$; $ab+ac+bc>0$; $abc>0$. Докажите, что $a>0$, $b>0$, $c>0$.

9-5. Из точки A, внешней к окружности, проведены две секущие. Пусть K и M — их первые точки пересечения с окружностью, B и C — вторые; O — точка пересечения CK и BM, $AM = a$, $MO = b$, $OC = c$. Найдите длину секущей AB.

Задачи предложили: Ю.Дудницын (1), В.Ковальджи (2), Б.Френкин (3,4), И.Шарыгин (5)

10 класс

10-1. Решите уравнение $(1-2|\sin x|\sin x)/\sqrt{x(8-x)}=0$.

10-2. В угол вписали три круга так, что средний касается большего и меньшего. Площадь большего круга 16 см^2, меньшего — 4 см^2. Найдите площадь среднего круга.

10-3. Докажите, что на графике функции $y=x^3+3x^2+3x-3$ есть точка, которая является центром симметрии графика.

10-4. Сейчас в ходу монеты достоинством 1, 5, 10, 20, 50 рублей. Укажите все денежные суммы, которые можно уплатить как четным, так и нечетным количеством монет. (Можно использовать одинаковые монеты.)

10-5. Четыре одинаковые банки с четырьмя разными красками наполненные на три четверти. Имеется возможность переливать любую часть жидкости из одной банки в другую. Можно ли во всех банках сделать одинаковую смесь? (Другой посуды нет и выливать краску нельзя.)

Задачи предложили: С.Саакян (1), Н.Васильев (2), А.Канель-Белов (3), А.Ковальджи (4), В.Ковальджи (5)

11 класс

11-1. Решите уравнение $\sqrt[8]{x+1}+\sqrt[8]{x-1}=\sqrt[8]{2}$.

11-2. Внутри угла AOB взята точка M. Точки K и L симметричны точке M относительно прямых OA и OB соответственно. Прямая KL пересекает OA в точке C, OB — в точке D. Докажите, что OM является биссектрисой угла CMD.

11-3. Вычислите интеграл $\int_0^1 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx$, рассмотрев криволинейную трапецию.

11-4. Докажите, что число $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1994}\right)\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1994$ а) целое; б) делится на 1995.

11-5. Петя склеил многогранник, затем разрезал его по ребрам на отдельные грани, сложил в конверт и послал Ване. Верно ли, что Ваня склеит такой же многогранник, какой был у Пети?

Задачи предложили: А.Ковальджи (1), И.Шарыгин (2), С.Саакян (3), Б.Френкин (4), Ю.Раскин (5)

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 класс

8-1. *Ответ*: 12 км/ч. Пусть s — длина пути, t — нужное время, тогда $10(t+1)=s$, $15(t-1)=s \Rightarrow 10(t+1)=15(t-1) \Rightarrow$ $\Rightarrow t=5,\ s=60$.

8-2. *Ответ*: квадрат с вершинами в точках (1; 2), (3; 0), (1; −2), (−1;0). Достаточно раскрыть модули в каждом из четырех случаев: $x\ge 1,\ y\ge 0$; $x\ge 1,\ y<0$; $x<1,\ y\ge 0$; $x<1,\ y<0$.

8-3. Выберем 20 самых старших учеников и докажем, что сумма их возрастов больше 260 лет. Средний возраст всех учеников равен 430/33. Средний возраст двадцати старших не меньше среднего возраста всех. Поэтому сумма возрастов двадцати старших не меньше чем $(430/33)\cdot 20 > 260$.

Замечание. На олимпиаде такое решение считалось полным. Однако «очевидное» утверждение о том, что средний возраст двадцати старших не меньше среднего возраста всех, нуждается в доказательстве.

Пусть n — средний возраст двадцати старших, m — средний возраст тринадцати младших. Тогда $20n+13m=430$ и $n\ge m$, поскольку каждый ученик из старшей группы не младше каждого ученика из младшей. Получаем $33n\ge 20n+13m\ge 430$, $n\ge 430/33$.

8-4. *Ответ*: 5:8. Пусть BO пересекает AC в точке E. Проведем $DM\parallel BE$ до пересечения с AC в точке M. По теореме Фалеса $AE:EM=5:2$, $EM:MC=1:3$. Пусть $AE=5k$, $EM=2k$, тогда $MC=3EM=6k$, $AE:EC=5:8$.

8-5. *Ответ*: успеет. Пусть M — шкура мамонта, T — шкура тигра, $П$ — юбка из перьев, K — копье.

I — первый базар: $M = 3П$, $T = 4K$,

II — второй базар: $M = 2T$, $П = 3K$.

1 день. Перешел с II на I и разменял $M \to 3П$.

2 день. Перешел с I на II и разменял $3П \to 9K$.

3 день. Перешел с II на I и разменял $9K \to 2T + K$.

4 день. Перешел с I на II и разменял $2T + K \to M + K$.

Итак, за 4 дня охотник добавил к шкуре мамонта одно копье. За 32 дня он добавит к шкуре мамонта 8 копий, которые можно разменять еще на две шкуры тигра. Точнее, на 31-й день у него будет 16 копий, которые он разменяет на 4 шкуры тигра.

9 класс

9-1. *Ответ*: 345, 630, 975. Варианты первой цифры 3, 6, 9. Варианты последней цифры 0 и 5. Средняя цифра должна быть средним арифметическим двух крайних.

9-2. Перельем всю краску из первой банки во вторую и третью. Затем перельем в первую банку половину второй и половину третьей. В первой банке красок будет поровну. Перельем все содержимое из второй банки в третью. Получим равную смесь красок.

9-3. Пусть в треугольнике ABC угол C прямой, D, E, F — центры квадратов, построенных на AC, BC и AB. Достаточно доказать, что D и E лежат на прямой CF. Действительно, углы C и F — прямые, поэтому четырехугольник $ACFB$ описанный. Отсюда углы ABC и AFC равны. С другой стороны, в треугольнике AFD угол AFD тоже равен углу ABC, поэтому точка D лежит на прямой FC. Аналогично, точка E лежит на прямой FC.

9-4. Допустим, что среди a, b, c есть отрицательные числа. Поскольку $abc > 0$, то отрицательных чисел ровно два. Пусть $a < 0, b < 0, c > 0$. Из второго неравенства получаем $ac + b(a + c) > 0$. Но $ac < 0$ и $b(a + c) < 0$, поскольку из первого неравенства $a + c = -b$. Пришли к противоречию.

9-5. *Ответ*: ac / b. Обозначим через α углы MCO и MBK, через β — угол CKB. Тогда $\angle BMA = 180^\circ - \beta$. По теореме синусов из треугольников CMO и BMA находим $b / \sin\alpha = c / \sin\beta, a / \sin\alpha = x / \sin(180^\circ - \beta)$. Преобразуем: $\sin\beta / \sin\alpha = c / b$, $\sin(180^\circ - \beta) / \sin\alpha = x / a$, откуда $x / a = c / b$.

10 класс

10-1. *Ответ*: $\pi / 4, 3\pi / 4,$ $9\pi / 4$. Если $\sin x < 0$, то числитель положительный и решений нет. Если $\sin x > 0$, то $1-2\sin^2 x=0$ или $\cos 2x = 0$, откуда $x = \pi/4 + n\pi/2$. Но $0 < x < 8$, поэтому $0 \le n \le 4$.

10-2. *Ответ*: 8 см². Проведем биссектрису угла O и радиусы окружностей в точки касания. Пусть r, x, R — длины радиусов. Из подобия треугольников $x/r = R/x$, $x=\sqrt{rR}$.

10-3. $y=(x+1)^3-4$. График этой функции получается из графика $y=x^3$ параллельным переносом. Но у графика $y = x^3$ есть центр симметрии, поэтому центр есть и у исходного графика, а именно, в точке $(-1;\ -4)$.

10-4. *Ответ*: любую сумму, начиная с 10 р. Все суммы, меньшие 10 р., можно разменять только рублями и пятерками, которые имеют одинаковую четность. А размен пятерки на рубли не меняет четности числа монет. Все суммы, начиная с 10 р., можно составить из монет 10 р. и 1 р., а затем поменять четность числа монет с помощью размена 10 р. = 5 р. + 5 р.

10-5. Перельем всю краску из первой банки в остальные. Затем перельем в первую банку по $1/3$ остальных банок, тогда в первой банке красок будет поровну. Перельем из второй банки все содержимое в третью и четвертую банки, а затем из них по половине банки обратно, тогда во второй банке красок будет поровну. Из третьей перельем все в четвертую, и там красок станет поровну.

11 класс

11-1. *Ответ*: $x=1$. Докажем, что других решений нет. Выражение слева существует только для $x \ge 1$ и является возрастающей функцией, поэтому при $x > 1$ оно будет больше постоянной величины справа.

11-2. $OK = OM = OL$. Проведем окружность с центром O и радиусом OM. Обозначим $\angle AOM = \alpha$, $\angle BOM = \beta$. По теореме о вписанном угле $\angle LKM = \beta$ (центральный угол $MOL = 2\beta$), $\angle CMK = \angle CKM = \beta$. Из треугольника OMP: $\angle OMK = 90° - \alpha$, $\angle OMC = 90° - \alpha - \beta$. Аналогично $\angle OMD = 90° - \alpha - \beta$. Итак, $\angle OMC = \angle OMD$.

11-3. *Ответ*: $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$. Пусть $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$, тогда $(x-2)^2 - y^2 = 4$ — уравнение окружности. Надо из площади кругового сектора вычесть площадь треугольника.

11-4. а) Раскрывая скобки, получим сумму целых слагаемых. б) Сгруппируем дроби парами: $1 + 1/1994$, $1/2 + 1/1993$, ... и приведем их к общему знаменателю. Все числители делятся на 1995, а знаменатели «исчезнут» после раскрытия скобок.

11-5. *Ответ*: неверно. *Решение 1.* Рассмотрим два равных тетраэдра, в основании которых правильный треугольник, а высоты не попадают в центр основания. Эти тетраэдры можно приложить основаниями и поворачивать на 120°. При этом получатся разные шестигранники.

Решение 2. Рассмотрим объединение куба с тремя четырехугольными пирамидами, основания которых равны грани куба. Эти пирамиды можно приложить к граням куба разными способами.

ГОРОДСКОЙ ТУР 1994

8 класс

8-1. Кооператив получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного — ровно на 10 банок. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляют.)

9 **8-2.** Ученик не заметил знак умножения между двумя трехзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа (и докажите, что ответ единственный).

8-3. В треугольнике ABC провели биссектрисы углов A и C. Точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на эти биссектрисы. Докажите, что отрезок PQ параллелен стороне AC.

8-4. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в ~~некоторый момент~~ оказаться в вершинах квадрата большего размера.

Сик, 1993

8-5. Придворный астролог называет момент времени хорошим, если часовая, минутная и секундная стрелки часов находятся по одну сторону от какого-нибудь диаметра циферблата (стрелки вращаются на общей оси и не делают скачков). Какого времени в сутках больше, хорошего или плохого?

8-6. Двое играют на доске 19×94 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при наилучшей игре и как надо играть?

Задачи предложили: И.Ященко (1), А.Ковальджи (2, 4), С.Маркелов (3), Д.Ботин (5), О.Крыжановский (6)

9 класс

9-1. Существует ли невыпуклый пятиугольник, у которого никакие две диагонали не имеют общих точек, кроме вершин?

9-2. У Коли есть отрезок k см, а у Левы — отрезок l см. Сначала Коля делит свой отрезок на три части, потом Лева — свой на три части. Если из полученных шести отрезков можно сложить два треугольника, то выигрывает Лева, а если нельзя — Коля. Кто из играющих, в зависимости от k и l, может обеспечить себе победу, и как ему следует играть?

9-3. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$ имеет бесконечное множество решений в целых числах x, y, z.

9-4. Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности еще раз в точках P и Q (P — на прямой BM, Q — на прямой BN). Докажите, что отрезки MP и NQ равны.

9-5. Найдите наибольшее натуральное число, не оканчивающееся нулем, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.

9-6. В квадрате 10×10 клеток нужно расставить один корабль 1×4, два — 1×3, три — 1×2 и четыре — 1×1. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин), но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что

а) если расставлять их в указанном порядке (начиная с больших), то каждому кораблю всегда найдется место (как бы их ни ставили на любое свободное место);

б) если расставлять их в обратном порядке (начиная с меньших), то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить нельзя (приведите пример).

Задачи предложили: А.Шапиро (1), Ю.Чеканов (2), Н.Васильев (3), И.Нагель (4), А.Галочкин (5), К.Игнатьев (6)

10 класс

10-1. Ученик не заметил знака умножения между двумя семизначными числами и написал одно четырнадцатизначное число, которое оказалось в три раза больше их произведения. Найдите эти числа.

10-2. Бесконечная последовательность чисел x_n определяется условиями: $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$, причем $0 \le x_1 \le 1$. Докажите, что последовательность, начиная с некоторого места, периодическая а) в том б) и только в том случае, если x_1 рационально.

10-3. Каждый из 1994 депутатов парламента дал пощечину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно составить парламентскую комиссию из 665 человек, члены которой не выясняли отношений между собой указанным способом.

10-4. D — точка на стороне BC треугольника ABC. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K. Докажите, что длина отрезка AK не зависит от положения точки D на BC.

10-5. Рассматривается произвольный многоугольник (не обязательно выпуклый). а) Всегда ли найдется хорда многоугольника, которая делит его на две равновеликие части? (Хордой многоугольника называется отрезок, концы которого принадлежат контуру многоугольника, а сам он целиком принадлежит многоугольнику.)

б) Докажите, что любой многоугольник можно разделить хордой на две части, площадь каждой из которых не меньше чем $1/3$ площади многоугольника.

10-6. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что у него есть отрицательный коэффициент, а все коэффициенты любой его степени $\left(P(x)\right)^n$, $n > 1$, положительные?

Задачи предложили: А.Ковальджи (1), Г.Шабат (2), В.Уфнаровский и М.Вялый (3), И.Шарыгин (4), В.Произволов (5), О.Крыжановский (6)

11 класс

11-1. Существует ли многогранник, у которого нет трех граней с одинаковым числом сторон?

11-2. См. задачу 10-2.

11-3. В круглый бокал, осевое сечение которого — график функции $y = x^4$, опускают вишенку — шар радиусом r. При каком наибольшем r шар коснется нижней точки дна? (Другими словами, каков максимальный радиус r круга, лежащего в области $y \geq x^4$ и содержащего начало координат)?

11-4. Из выпуклого многогранника с 9 вершинами, одна из которых A, параллельными переносами, переводящими A в каждую из остальных вершин, образуется 8 равных ему многогранников. Докажите, что хотя бы два из этих 8 многогранников пересекаются по внутренним точкам.

11-5. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC

и AD — в точке Q. Докажите, что если каждая из трех пар биссектрис: внешних углов четырехугольника при вершинах A и C, внешних углов при вершинах B и D, а также внешних углов при вершинах Q и P (треугольников QAB и PBC соответственно) имеет точку пересечения, то эти три точки лежат на одной прямой. AD

* **11-6.** Докажите, что для любого $k > 1$ найдется степень 2 такая, что среди k последних ее цифр не менее половины составляют девятки. (Например, $2^{12} = 4096$, $2^{53} = ...992$.)

Задачи предложили: А.Ковальджи и Г.Кондаков (1), Г.Шабат (2), Н.Васильев (3), Г.Гальперин (4), С.Маркелов (5), Н.Васильев (6)

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 класс

8-1. *Ответ*: на 15 банок. *Указание*. Выразите объем банки через объем бидона.

Решение. Объем банки $1/6 + 1/10 = 4/15$ бидона. С другой стороны, объем банки $1/5 + 1/x$ бидона. $1/5 + 1/x = 4/15$, $x = 15$.

8-2. *Ответ*: $7 \cdot 143 \cdot 143 = 143143$. *Указание*. Пусть x, y — искомые трехзначные числа, тогда $7xy = 1000x + y$.

Решение 1. $7y = 1000 + y/x$; y/x — целое число в пределах от 1 до 9, поэтому $1001 \le 7y \le 1009$, $143 \le y \le 144$. Поскольку $x \ge 100$, то $y/x = 1$, $7y = 1001$, $y = 143$, $x = 143$.

Решение 2. $1000x = (7x-1)y$. Поскольку x и $7x-1$ не имеют общих делителей, то $7x-1$ — делитель 1000. Но $7x-1 > 500$, поэтому $7x-1 = 1000$, откуда $x = 143$, $y = 143$.

Рис.

8-3. *Указание*. Продлите перпендикуляры до пересечения с прямой AC.

Решение. Продолжим BP и BQ до пересечения с прямой AC в точках A_1 и C_1. В треугольнике ABC отрезок AQ является биссектрисой и высотой, а значит, и медианой. Аналогично, отрезок CP является медианой треугольника CBA_1. Следовательно, PQ — средняя линия треугольника A_1BC_1, откуда PQ параллелен A_1C_1 и AC.

8-4. Предположим, что кузнечики сумели попасть в вершины большего квадрата, тогда, прыгая в обратном порядке, они смогут попасть в вершины меньшего. Но это невозможно, поскольку отправляясь от большего квадрата, они всегда будут попадать в узлы квадратной сетки со стороной, равной стороне большего квадрата.

Замечание. Докажем, что если кузнечики A и B находятся в узлах сетки, и A прыгнул через B, то он попадет в узел сетки. Действительно, сделаем центральную симметрию всей плоскости относительно кузнечика B, тогда сетка перейдет сама в себя, а кузнечик A, с одной стороны, останется на сетке, а с другой стороны, попадет в точку, в которую хотел прыгнуть.

8-5. *Ответ*: больше хорошего. Заметим, что 1) любые две стрелки определяют «плохой» сектор между их продолжениями, попав в который, третья стрелка создает плохой момент времени. Этот сектор не превосходит 180°. 2) Через целое число часов положение минутной и секундной стрелок не меняется. 3) Через 6 часов после каждого плохого момента будет хороший. 4) Бывают хорошие моменты, через 6 часов после которых также хороший момент.

Комментарий. Количество моментов плохого и хорошего времени бесконечно, а потому говорить о том, что хороших моментов больше, нестрого (три школьника это заметили, но все они задачу не решили).

Нужно рассуждать о сумме длин интервалов плохого и хорошего времени. Например, каждому интервалу плохого времени соответствует свой интервал хорошего времени такой же длины (при сдвиге на 6 часов), поэтому хорошего времени не меньше, чем плохого. Кроме того, некоторым хорошим интервалам соответствуют хорошие интервалы, поэтому хорошего времени больше. Важно отметить, что при сдвиге суток на 6 часов мы получаем сутки, состоящие из тех же интервалов плохого и хорошего времени, но в другом порядке.

8-6. *Ответ*: выигрывает первый. Первый закрашивает квадрат 18×18, примыкающий к большей стороне прямоугольника, так, чтобы ось симметрии квадрата и ось симметрии прямоугольника совпали. Тогда относительно этой общей оси остаток прямоугольника распадется на две одинаковые части. Теперь на каждый ход второго игрока первый отвечает симметричным ходом, причем у первого игрока ход всегда найдется, поскольку второй не может закрасить квадрат, пересекающий ось симметрии.

9 класс

9-1. Пусть пять точек A, B, C, D, E, из которых две D, E лежат внутри треугольника ABC, попарно соединены отрезками. Этот граф из 10 отрезков можно разбить на две несамопересекающиеся ломаные из 5 звеньев каждая.

9-2. Если $k > l$, то выигрывает Коля. Ему достаточно сделать часть, которая будет больше суммы всех остальных. Если $k \leq l$, то выигрывает Лева: он ломает l так, чтобы его большая часть равнялась большей части колиного отрезка, а две другие были равны между собой. Тогда получатся два равнобедренных треугольника.

9-3. Избавимся от двух кубов с помощью подстановки $z = -x$. Получим $2x^2 + y^2 = y^3$, $2x^2 = (y-1)y^2$. Решение найдется, если $(y-1)/2$ будет квадратом, тогда $y = 2k^2 + 1$, $x = k(2k^2+1)$.

9-4. Пользуясь теоремой о вписанном угле, легко доказать подобие треугольников QAN и MAP. Докажем равенство отрезков AM и AQ (тогда треугольники будут равны). Для этого докажем равенство дуг: $AQ = MB + BA$ (дуга AQ не пересекает вторую окружность). Заметим, что $\angle BNA = \angle BAM$, поскольку первый опирается на дугу AB, а второй заключен между хордой AB и касательной AM. С другой стороны, $\angle QNA$ равен полуразности дуг AQ и AB, а $\angle MAB$ равен половине дуги MB. Отсюда получаем равенство дуг: $AQ = MB + BA$.

9-5. *Ответ*: это число 180625, которое после вычеркивания 8 уменьшается в 17 раз.

Решение. Пусть b — вычеркнутая цифра, a — часть числа слева от b, c — справа от b, тогда число имеет вид $\overline{abc}$. Рассмотрим отношение исходного числа к полученному:

$$r = (a10^n + b10^{n-1} + c)/(a10^{n-1} + c), \qquad (1)$$

где $c < 10^{n-1}$.

$$r - 10 = (b10^{n-1} - 9c)/(a10^{n-1} + c) \le b/a \le 9/a \le 9.$$

Итак, $r \le 19$.

Поскольку r число целое, то $a \le 9$. Поэтому для поиска максимального исходного числа нужно найти максимальное n. Перепишем (1) в виде

$$(b + 10a - ra)10^{n-1} = (r-1)c.$$

Число c по условию не оканчиватся нулем, поэтому разложение c на простые множители либо не содержит двоек, либо не содержит пятерок.

1) Пусть c не содержит двоек. Рассмотрим максимальную степень двойки у сомножителя $r-1$. Это 16. Поэтому $n \le 5$. При $n = 5$

$$(b - 7a)5^4 = c.$$

Получаем, что c делится на 625, $a = 1$, $b = 8$ или $b = 9$. При $b = 9$ число оканчивается нулем, и потому не подходит. При $b = 8$ получаем $c = 625$ и ответ 180625.

2) Пусть c не содержит пятерок, тогда $r - 1$ делится на степень пятерки не выше первой, поэтому n не больше 2, и число заведомо не будет максимальным.

9-6. В задаче б) легко привести пример «непродолжаемой» расстановки девяти кораблей.

В задаче а) есть «подводный камень»: казалось бы, достаточно доказать, что найдется место последнему одноклеточному кораблю. Но на самом деле нужно доказать, что в процессе расстановки найдется место каждому очередному кораблю.

Корабль 1×4 поставить можно. Докажем, что очередной корабль 1×3 поместится. Для этого отметим 8 вспомогательных кораблей 1×3, параллельных друг другу с интервалом в две клетки. Поставленные корабли могут задеть (пересечь или коснуться) не больше двух отмеченных, поэтому останется хоть один незадетый отмеченный корабль, на место которого можно поставить очередной корабль 1×3.

Пусть уже расставлены корабли 1×4, два 1×3 и меньше трех 1×2. Докажем, что еще один корабль 1×2 поместится. Для этого отметим 12 вспомогательных кораблей 1×2, параллельных друг другу с интервалом в две клетки. Каждый поставленный корабль может задеть не больше двух отмеченных, поэтому останется незадетый отмеченный корабль.

Аналогично поместится очередной одноклеточный корабль. Отметим 16 вспомогательных кораблей 1×1 с интервалом в две клетки. Поставленные корабли задевают не больше 15 отмеченных.

Замечания. 1. Интересно найти максимальное число одинаковых кораблей, например, 1×4, которые заведомо поместятся.

2. Автор этой задачи, придуманной им в студенческие годы, создал программный комплекс для оптимизации размещения деталей автомобиля внутри корпуса заданной формы. Сейчас он выполняет заказы крупных автомобильный компаний.

10 класс

10-1. См. решение задачи 8-2.

10-2. а) Если $0 \le x_n \le 1$, то $0 \le x_{n+1} \le 1$. Если x_1 рациональное, то все x_n рациональные, причем со знаменателем не большим, чем у x_1. Но дробей со знаменателями не больше заданной величины конечное число. Поэтому какие-то члены последовательности повторятся, и с этого момента начнется период.

б) Допустим, что $x_{n+k} = x_n$. Раскрывая знак модуля, получим либо $x_{n+1} = 2x_n$, либо $x_{n+1} = 2 - 2x_n$. Поэтому $x_{n+k} = a + b2^k x_n$, где

$|b| = 1,\ b = \pm 1$

a и b — целые (b по модулю равно 1). Получаем линейное уравнение с целыми коэффициентами $x_n = a + b2^k x_n$, откуда x_n — рациональное число, и x_1 — тоже.

Приведем *другое решение* (сразу обоих пунктов). Запишем число x_0 в двоичной системе счисления: $x_0 = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ Обозначим $f(x_n) = x_{n+1}$. Легко видеть, что двоичная запись числа $f(x_0) = 0{,}a_2a_3a_4\ldots$ получается из двоичной записи числа x_0 сдвигом. Таким образом, задача свелась к известному утверждению о разложении чисел в бесконечную периодическую дробь.

Замечание. Задача возникла из символической динамики. Функция f называется «палаточным отображением». Попробуйте подсчитать, сколько точек имеет период 1993.

10-3. Покажем идею решения по индукции. Наименее битый депутат бит не более одного раза. Отправим его в комиссию, а его врагов выведем из парламента. За одну операцию комиссия растет на 1, а число депутатов убывает не больше чем на 3. Поэтому в комиссию войдет не меньше $1/3$ депутатов.

Замечание. Более общий факт состоит в следующем. Пусть каждый депутат дал своим коллегам k пощечин. Тогда существует разбиение парламента на $2k+1$ «приличных» комиссий. Идея решения та же: поскольку у наименее битого депутата не больше $2k$ врагов, то его можно определить в комиссию, а врагов вывести из парламента.

10-4. Достаточно записать все возможные равенства для пар касательных, проведенных из одной точки к той или другой окружности: их линейные комбинации (суммы и разности) позволят выразить нужный отрезок через стороны треугольника: $AK = (AB + AC - BC)/2$.

10-5. а) *Ответ*: не всегда. Примером служит многоугольник, состоящий из трех одинаковых квадратов площадью 1 каждый, соединенных тонкими изогнутыми коридорами с общей площадью 0,1. Этот пример показывает, что оценка в пункте б) точная.

б) Идея состоит в том, чтобы двигать хорду параллельно самой себе по контуру многоугольника в ту сторону, в которую площадь s меньшей из двух частей многоугольника увеличивается (не уменьшается).

Выберем направление хорды, не параллельное сторонам и диагоналям многоугольника. Проследим, что может произойти, когда хорда проходит через вершину. В этой точке могут сходиться или расходиться два коридора, тогда хорда, выходя из коридора, скачком увеличится или, входя в коридор, скачком уменьшится, однако площадь будет меняться непрерывно. Более подробное решение см. в «Кванте» №1, 1995, с.28.

Другое решение можно получить, предварительно доказав, что любой многоугольник можно триангулировать (разбить на треугольники) диагоналями, лежащими внутри него.

10-6. Годится многочлен $x^4 + x^3 - \varepsilon x^2 + x + 1$ при малом $\varepsilon > 0$. Если требуемое свойство верно для квадрата и куба этого многочлена, то оно верно и для любой его степени.

Замечание. Подумайте в этой связи над такой трудной задачей: пусть $s(n)$ — сумма цифр числа n; ограничена ли последовательность $s(n)/s(n^2)$?

11 класс

11-1. *Ответ:* существует. Если искать наименьшее число граней, то брать их надо парами по числу сторон. Двух треугольников и двух квадратов не хватит, ибо четырехгранник бывает только тетраэдром. Шестигранник сделать можно: расположим два 5-угольника с общим ребром в виде открытой ракушки, а щель заполним двумя треугольниками (по краям) и двумя квадратами. Другое решение — срезать у куба или тетраэдра две соседние вершины.

Замечание. На московской олимпиаде 1973 года была задача: «Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.»

11-2. См. решение задачи 10-2.

11-3. *Ответ:* $3\sqrt[3]{2}/4$. *Решение.* Переформулируем задачу: возьмем достаточно большую окружность, которая касается начала координат. Она пересекает параболу. Будем уменьшать окружность, пока она не коснется ветвей параболы. Иначе говоря, выясним, при каком наименьшем R система уравнений

$$y = x^4,\ x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

имеет ненулевое решение. Подставим $y = x^4$ во второе уравнение. Приведем подобные члены и сократим на x^2 $(x > 0)$: $x^6 - 2Rx^2 + 1 = 0$. Выразим R и найдем минимум функции

$$R = \left(x^4 + 1/x^2\right)/2$$

с помощью производной $(4x^3 - 2/x^3 = 0)$. Получим ответ

$$x = 1/\sqrt[6]{2},\ y = 1/\sqrt[3]{4},\ R = 3\sqrt[3]{2}/4.$$

Замечание. Аналогичную задачу можно решить для любого графика $y = |x|^a$. Результат при $a > 2$ аналогичный; при $a = 2$ получим $r = 1/2$ — радиус кривизны графика в точке $(0;0)$; при $0 < a < 2$ никакой круг не может коснуться дна графика.

11-4. Сделаем гомотетию исходного многогранника (M) с центром в точке A и коэффициентом 2. Объем растянутого многогранника (M') будет в 8 раз больше объема M. Докажем, что все 8 «перенесенных» многогранников содержатся в M'.

Пусть вершину A перенесли в вершину B, X — произвольная точка в M. Докажем, что после переноса образ X (точка Y) принадлежит M'. Действительно, четырехугольник $ABYX$ — параллелограмм, отрезок BX принадлежит M, его середина (K) тоже. Но Y является гомотетией K с центром A и коэффициентом 2, поэтому Y принадлежит M'.

Остается оценить объемы, заметив, что точки вблизи вершины A не принадлежат ни одному из «перенесенных» многогранников. Расположим многогранник так, чтобы вершина A была выше всех, тогда существует плоскость, которая проходит ниже точки A, но выше всех остальных.

11-5. Заметим, что сделать чертеж к задаче почти невозможно (точки пересечения лежат далеко друг от друга). Поэтому будем искать решение из общих соображений.

Для каждой прямой, содержащей сторону четырехугольника $ABCD$, определим функцию — ориентированное расстояние до этой прямой: если точка лежит по ту же сторону от прямой, что четырехугольник, то берем обычное расстояние, а если по другую сторону, то расстояние со знаком минус.

Эти четыре функции f_1, f_2, f_3, f_4 от координат точек являются линейными, т.е. записываются в виде $f_i(x,y) = a_i x + b_i y + c_i$.

Заметим, что точка лежит на биссектрисе внешнего угла четырехугольника тогда и только тогда, когда сумма значений функций для сторон угла обращается в нуль.

Для каждой из трех точек пересечения биссектрис, о которых говорится в условии, получаем, что сумма всех четырех функций обращается в нуль.

Но сумма линейных функций является линейной функцией, а множество точек, на котором линейная функция, отличная от константы, принимает постоянное значение, есть прямая.

Сумма наших четырех функций не является тождественным нулем, поскольку внутри четырехугольника она положительна. Поэтому указанные точки пересечения биссектрис лежат на одной прямой.

11-6. Много девяток подряд в степенях двойки может появиться, если степень двойки «чуть» меньше числа, делящегося на большую степень десятки. Например, $2^{12} + 4$ делится на 100, $2^{53} + 8$ делится на 1000.

Попробуем найти сначала числа вида $2^n + 1$, которые делятся на высокую степень пятерки. Затем домножим эти числа на соответствующую степень двойки $2^k(2^n+1)$ и получим числа, деля щиеся на высокую степень десятки. Раскрывая скобки и отбра сывая меньшее слагаемое, получим нужную степень двойки.

Лемма. При каждом $k \geq 1$ число $2^{2\cdot 5^{k-1}}+1$ делится на 5^k.

Докажем это по индукции. Пусть $a = 4^{5^{k-1}}$, $a+1$ делится на 5^k. Тогда $4^{5^k}+1 = a^5+1 = (a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)$. Поскольку $a+$ делится на 5^k, достаточно доказать, что второй сомножител делится на 5. Действительно, a имеет вид $a=5m-1$, поэтому вс слагаемые во втором сомножителе дают остаток 1 при делении н 5, а их сумма дает остаток нуль.

Итак, число $2^k\left(2^{2\cdot 5^{k-1}}+1\right)$ оканчивается не меньше чем k н лями. Но при $k > 1$ количество цифр числа 2^k не превосход $k/2$ (поскольку $2^3 < 10$). Значит, среди последних k цифр чис $2^{2\cdot 5^{k-1}+k}$ не больше $k/2$ цифр могут отличаться от 9.

Замечания. 1. Похожими рассуждениями можно доказать, ч числа $4^0, 4^1, 4^2, \ldots, 4^{5^k-1}$ дают различные остатки при делении 5^k. Попробуйте доказать более общий факт: если $x-1$ делит на p^k, но не делится на p^{k+1}, то x^n-1 делится на p^{k+r} тогда только тогда, когда n делится на p^r. Это важное утвержден (лемма Гензеля) часто используется в теории чисел.

2. На Ленинградском отборе была похожая задача: требов лось указать такое k, что в десятичной записи числа 5^k встре ется n нулей, идущих подряд.

ОТБОР НА ВСЕРОССИЙСКУЮ ОЛИМПИАДУ 1994 ГОДА

9 класс

9-1. Существует ли бесконечная последовательность целых чисел $\{a_n\}$ такая, что $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{n+2}^2$ при всех натуральных n?

9-2. Окружность, вневписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке D. Две окружности, вневписанные в треугольники ABD и DBC, расположены внутри угла ABC и касаются прямой BD в точках X и Y. Докажите, что X и Y совпадают.

9-3. Все города страны, кроме столицы, расположены вдоль шоссе. Из столицы в каждый город ведет прямая дорога. Две компании хотят приватизировать дороги и участки шоссе так, чтобы каждая компания могла проехать из любого города в любой другой только по своим дорогам. Смогут ли они это сделать при каком-нибудь числе городов, большем одного?

9-4. Четырехугольник описан около окружности. Через каждую его вершину провели биссектрису внешнего угла (т.е. прямую, перпендикулярную биссектрисе внутреннего угла). Точки пересечения проведенных прямых образуют новый четырехугольник Q. Докажите, что а) Q вписан в некоторую окружность; б) диагонали Q пересекаются в центре исходной окружности.

9-5. Докажите, что для любой последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ все целые части квадратных корней из чисел $b_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n)$ различны.

9-6. Есть прямоугольник $m \times n$ клеток. Какое наименьшее число клеток в нем можно заштриховать, чтобы в оставшихся клетках нельзя было разместить «уголок» из трех клеток (в любом положении)?

Задачи предложили: О.Крыжановский (1), С.Маркелов (2), А.Шаповалов (3), Л.Курляндчик (5), фольклор (6).

10 класс

10-1. Найдите сумму всех произведений по 9 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 18, а сумма любых двух, входящих в одно произведение, не равна 19.

10-2. К диаметру BK некоторой окружности Γ проведены касательные b, k: $B \in b$, $K \in k$. На окружности выбрана точка D, через которую проведена касательная d. Точки пересечения d с b и k обозначим соответственно A и F. Окружность, проходящую через A, D, K, обозначим Ω; точку пересечения прямых AK и BF обозначим E; вторую точку пересечения Ω с b обозначим C. Докажите, что прямые ED и CK пересекаются на окружности Γ.

10-3. Докажите, что в любой многочлен $P(x)$ степени больше 1 можно подставить некоторый многочлен $Q(x)$ так, чтобы $P(Q(x))$ разлагался в произведение многочленов, отличных от констант. (Все многочлены с целыми коэффициентами.)

10-4. Известно, что Земля плоская. Верно ли, что любой выпуклый многогранник и точечный фонарь можно расположить так, что тень многогранника на Земле будет многоугольником, у которого хотя бы один угол острый?

10-5. Существует ли функция f, отличная от постоянной, такая, что $f(\operatorname{tg} x) \equiv f(1/\cos x)$?

10-6. Бесконечная в обе стороны лента разбита на равные ячейки. В этих ячейках живут точки по следующему закону: точка появляется в ячейке, если секундой ранее число занятых соседних ячеек было нечетно (две точки в одной ячейке не живут), а если четно — то исчезает. Докажите, что

а) если в некоторый момент расположение точек вдоль ленты периодично, то состояния ленты будут периодически повторяться; б) если через какое-то время состояние ленты повторилось, то расположение точек вдоль ленты периодично.

Задачи предложили: В.Произволов (1), С.Маркелов (2,5), А.Канель-Белов (3,6), Р.Федоров и А.Козеренко (4)

11 класс

11-1. Докажите, что неравенство

$$a+b(x+y+z+t)+c(xy+xz+xt+yz+yt+zt)+$$
$$+d(xyz+xyt+xzt+yzt)+exyzt \geq 0$$

выполняется при всех значениях x, y, z, t таких, что $0 \leq x, y, z, t \leq 1$, тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие неравенства: $a \geq 0$; $a+b \geq 0$; $a+2b+c \geq 0$; $a+3b+3c+d \geq 0$; $a+4b+6c+4d+e \geq 0$.

11-2. Докажите, что для любого натурального n существует такое $m(n)$, что число, у которого ровно n различных простых делителей и все они больше $m(n)$, не может быть совершенным (совершенное число равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа).

11-3. Вневписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке M, O — центр вписанной в треугольник окружности, K — середина стороны BC. Докажите, что прямые AM и OK параллельны.

11-4. На белой плоскости живет черная ограниченная клякса. Каждая точка плоскости в следующую секунду становится черной, если в круге радиусом 1 с центром в этой точке площадь кляксы больше, чем половина круга, и белой в противном случае. а) Может ли клякса жить вечно? б) Может ли клякса через некоторое время увеличиться по площади более чем в миллион раз?

11-5. Для каких многочленов $Q(x)$ верно следующее утверждение: «для любого многочлена $P(x)$ из того, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет корней, следует, что уравнение $P(P(x)) = Q(x)$ также не имеет корней»?

11-6. На бесконечной в обе стороны ленте напечатана бесконечная последовательность цифр от 1 до 9. Докажите, что либо какая-то комбинация цифр повторится 10 раз подряд, либо из нее можно вырезать 10 стозначных чисел, идущих в порядке строгого убывания.

Задачи предложили: А.Михайлов из Латвии (1), А.Сарсембаев из Казахстана (2), С.Маркелов (3), А.Канель-Белов (4,5,6).

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

9 класс

9-1. *Ответ:* не существует. Можно считать, что в каждом равенстве у трех чисел нет общего делителя. Тогда в «пифагоровой» тройке гипотенуза a_{n+2} нечетна (докажите). Но все a_n при $n > 2$ бывают в роли гипотенузы, поэтому все они нечетны. С другой стороны, при любом n среди катетов есть один четный. Противоречие.

9-2. Достаточно доказать, что $BX = BY$. Как известно, BX и BY — полупериметры треугольников BAD и CBD соответственно. Докажем, что периметры наших треугольников равны. Пусть K и L — точки касания продолжений BA и BC с вневписанной окружностью треугольника ABC. Тогда $BX = AB + AD + BD = AB + AK + BD = BK + BD = BL + BD = BC + CL + BD = BC + CD + BD = BY$. Что и требовалось доказать.

9-3. *Ответ:* не смогут. Допустим, что это возможно. Пусть на шоссе n городов, тогда всего $2n-1$ дорог. Поскольку дороги одной компании соединяют все города в связное множество, то этих дорог не меньше n. Тогда дорог двух компаний не меньше $2n$. Противоречие.

9-4. а) Обозначим вершины исходного четырехугольника через A, B, C, D. Пусть биссектрисы, проходящие через вершины A и B, пересекаются в точке X, а биссектрисы, проходящие через вершины C и D — в точке Y. Достаточно доказать, что $\angle AXB + \angle CYD = 180^\circ$ (теорема о сумме углов четырехугольника).

б) Пусть O — центр окружности, Z — точка пересечения биссектрис, проходящих через точки A и D. Достаточно доказать, что $\angle AOX + \angle AOD + \angle DOY = 180^\circ$. Заметим, что четырехугольник $AOBX$ — вписанный, так как у него два противоположных угла прямые (центр окружности, описанной около многоугольника, лежит на каждой из биссектрис его углов).

9-5. Достаточно доказать, что в последовательности b_n каждое число отличается от предыдущего не менее чем на 1, т.е. $b_{n+1} \geq b_n + 1$. Обозначим $a = a_1 + \ldots + a_n$, $c = 1/a_1 + \ldots + 1/a_n$, $x = a_{n+1}$, тогда достаточно проверить неравенство $\sqrt{(a+x)(c+1/x)} \geq \sqrt{ac} + 1$. Возводя в квадрат и приводя подобные члены, получим $a/x + cx \geq 2\sqrt{ac}$. Последнее очевидно.

9-6. *Ответ:* 1) Если n и m четны, то $nm/2$. 2) Если n четно, m нечетно, то $\dfrac{n(m-1)}{2}$. 3) Если n и m нечетны и $n \geq m$, то $\dfrac{n(m-1)}{2}$.

Наибольшую сложность представляет третий случай.

1) Закрасим вертикальные полоски через одну и докажем, что нельзя обойтись меньшим числом закрашенных клеток. В самом деле, разобьем прямоугольник на $nm/4$ квадратиков 2×2. В каждом из них надо закрасить не менее двух клеток.

2) Закрасим полоски через одну в нечетном направлении, начиная со второй. Докажем, что меньшим числом закрашенных клеток не обойтись. В самом деле, из такого прямоугольника можно вырезать $n(m-1)/4$ квадратиков 2×2, в каждом из которых нужно закрасить две клетки.

3) Пример аналогичен случаю 2: закрасим $\dfrac{m-1}{2}$ полосок $1 \times n$. (Поскольку оба направления нечетны, мы выбираем то, которое дает большую экономию закрашенных клеток.)

Докажем, что меньше закрасить нельзя. Достаточно свести задачу к меньшему прямоугольнику. Для этого покажем, что в угловой каемке, дополняющей прямоугольник размерами $(n-2) \times (m-2)$ до прямоугольника размерами $n \times m$, необходимо закрасить $2(m+n) - 3 = n(m-1)/2 - (n-2)(m-3)/2$ клеток.

В самом деле, эту каемку можно разрезать на $\dfrac{m+n-6}{2}$ квадратиков 2×2 и фигуру F, представляющую собой квадрат 3×3 без угловой клетки. В квадратиках необходимо закрасить не менее $m+n-6$ клеток, а в фигуре F — не менее трех клеток (так как она содержит два квадратика 2×2 с общей клеткой). Получаем требуемую оценку.

10 класс

10-1. *Ответ:* $9!\cdot19^9$. Разобьем числа 1, ..., 18 на 9 пар с суммой 19: (1,18), (2,17), ..., (9,10). В каждом произведении встречается ровно одно число из каждой пары. Назовем произведение $n_1n_2\ldots n_9$ упорядоченным, если n_i — число из i-й пары (т.е. $n_i=i$ или $n_i=19-i$). Искомая сумма всех произведений превосходит сумму всех упорядоченных произведений в 9! раз. Будем складывать произведения парами

$$n_1n_2\ldots n_9+n_1n_2\ldots(19-n_9)=n_1n_2\ldots n_8\cdot19,$$

затем опять парами

$$n_1n_2\ldots n_8\cdot19+n_1n_2\ldots(19-n_8)19=n_1n_2\ldots n_7\cdot19^2.$$

Продолжая процесс, получим, что сумма всех упорядоченных произведений равна 19^9.

10-2. По теореме о равенстве касательных $AB=AD$, $FK=FD$. Треугольники ABE и KFE подобны (так как $AB\parallel FK$), откуда $\dfrac{AE}{EK}=\dfrac{AB}{FK}=\dfrac{AD}{DF}$, значит $DE\parallel AB$.

Обозначим вторую точку пересечения ED и Γ через L. Обозначим точку пересечения KL и b через C'. Достаточно доказать, что C' совпадает с C, т.е. что точки C', A, D и K лежат на одной окружности. $\angle BC'K=\angle DLK$, так как $DE\parallel AB$. $\angle DLK=\angle FDK$ (теорема об угле между касательной и секущей + теорема об угле, вписанном в окружность). Итак, $\angle ADK=$ $=180^\circ-\angle FDK=180^\circ-\angle AC'K$. Значит, четырехугольник $C'ADK$ — вписанный. Что и требовалось доказать.

10-3. Заметим, что $P(z)-P(x)$ делится на $z-x$ (докажите). Возьмем такое z, чтобы $z-x$ делилось на $P(x)$. Например, $z=$ $=Q(x)=x+P(x)$. Итак, $P(Q(x))$ делится на $P(x)$. Поскольку степень многочлена $P(Q(x))$ выше степени $P(x)$, то второй сомножитель отличен от константы.

Замечание. Эта задача возникла из серии задач, предложенной С.Конягиным и позднее представленной на конференции Турнира Городов. Общая гипотеза состоит в том, что для любого многочлена P при бесконечно многих n произведение $P(1)\cdot\ldots\cdot P(n-1)$ делится на $P(n)$. Рассуждения, приведенные в решении задачи 10-3, выводят эту гипотезу из другой гипотезы: при бесконечно многих n число $P(n)$ разлагается на простые множители, меньшие n. Задача 10-3 является основной леммой для подбора таких n в случае квадратных многочленов. (В этом случае степень $P(x+P(x))/P(x)$ равна 2, т.е. степени P.) Подумайте, как доказать эти гипотезы для многочленов второй степени.

10-4. *Ответ:* верно. Расположим одну из вершин A многогранника выше других. Расположим фонарь на вертикали, не пересекающей многогранник, чуть выше вершины A. Тогда тени всех вершин, кроме A, будут близко от фонаря, а тень A (точка A') будет далеко, и угол при A' будет острым.

Для строгости нужно сказать, что тени всех вершин, кроме A, стремятся к конечным предельным положениям, а тень A стремится к бесконечности, когда высота фонаря стремится к высоте A. Таким образом, угол при вершине A' опирается на меньшую сторону треугольника, построенного на соседних вершинах тени, и тем самым является острым.

Идея другого решения. Зафиксируем многогранник и фонарь. Тень образует конус. Выберем плоскость Земли так, чтобы она отсекала от конуса ограниченную область и образовывала острый угол. Для этого возьмем точку B на ребре конуса и проведем на прилегающих гранях два луча, близких к ребру и направленных в сторону вершины (фонаря). Потом растянем сечение с помощью гомотетии так, чтобы плоскость сечения не пересекала многогранник.

10-5. *Ответ:* существует, например, $f(x)=\cos(2\pi x^2)$. Заметим, что $\operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x - 1$. Будем искать сначала функцию $g(\operatorname{tg}^2 x) = g(1/\cos^2 x)$. Обозначим $t = 1/\cos^2 x$, тогда $g(t-1)=g(t)$. Получаем, что $g(t)$ — любая периодическая функция с периодом 1, например $\cos(2\pi t)$. Возьмем $f(x) = g(x^2)$.

10-6. Покажем, что периодичность в пространстве влечет периодичность во времени. В самом деле: переход к следующему поколению сохраняет период, а число различных лент с данным периодом k конечно (оно равно 2^k). Два состояния повторятся. Повторение вызовет повторение следующих состояний, и начнется период.

Теперь покажем, что периодичность во времени влечет периодичность в пространстве. Нам понадобятся две леммы:

Лемма 1. а) Влияние точек на расстоянии не меньшем K от данной сказывается не ранее, чем через K поколений.

б) Если изменить состояние одной ячейки, находящейся на расстоянии K от данной (не меняя состояния других ячеек), то это приведет к смене состояния данной ячейки спустя K единиц времени.

Лемма 2. Пусть дан кусок ленты длиной $2n$. Тогда условие совпадения содержимого этого куска через n поколений с содержимым этого куска в начальный момент времени однозначно определяет содержимое двух ячеек, соседних с этим куском.

Доказательство. Рассмотрим внутреннюю ячейку, находящуюся на расстоянии $n-1$ от края куска (от другого края она находится на расстоянии большем n) и применим лемму 1. («Сигнал» от ячейки, соседней с куском, дойдет до рассматриваемой ячейки.)

Перейдем к решению. Пусть n — период. По лемме 2 кусок длиной $2n$ через n секунд однозначно определяет последующий символ. Остается заметить, что различных кусков длиной $2n$ конечное число (не превосходящее 2^{2n}). Произойдет повторение кусков, которое обеспечит повторение последующих символов, и начнется период.

Замечания. 1. Если период в пространстве в точности равен 2^n, то через 2^n поколений все клетки станут белыми. Если период во времени равен 2^n, то период в пространстве равен $3 \cdot 2^n$.

Идея доказательства. Занумеруем ячейки целыми числами. Если рассмотреть новую единицу времени — две секунды, то окажется, что на каждую ячейку повлияли ячейки той же четности, и только они, т.е. лента разобьется на две «ленты» (из четных и нечетных номеров), на каждой из которых будет тот же закон эволюции. Получается индуктивный спуск.

2. Рассуждениям, устанавливающим периодичность, посвящена статья А.Белова и М.Сапира «И возвращается ветер» («Квант», №4, 1990).

3. Другую идею решения предложил школьник (А.Буфетов). Рассмотрим «пространство-время». Пусть $y(t,x)$ — состояние ячейки с координатой x в момент времени t. Условие задачи означает, что

$$y(x-1,t-1)+y(x+1,t-1)+y(x,t)\equiv 0 \pmod 2,$$

где $y(t,x)=0$, если ячейка пустая, и $y(t,x)=1$, если она с точкой. Остается заметить, что каждый горизонтальный ряд однозначно определяет следующий горизонтальный ряд, а два соседних вертикальных — следующий вертикальный.

Замечание. Если лента содержит ровно одну черную точку, то при эволюции получится треугольник Паскаля по модулю два.

11 класс

11-1. В одну сторону доказательство очевидно: подставим вместо переменных (x,y,z,t) поочередно наборы чисел $(1,0,0,0)$,

$(1,1,0,0)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,1,1)$ и получим указанные неравенства.
Докажем обратное утверждение. Рассмотрим левую часть неравенства как функцию переменных x, y, z, t. Эта функция линейна по каждой переменной. Как известно, минимум линейной функции достигается в «крайних» точках области значений переменных, т.е. в одной из точек $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,1,1)$.

Замечание. Свойства минимумов (максимумов) линейных функций позволяют решать многие олимпиадные задачи (см. статью А. Канеля и А. Ковальджи «Треугольники и катастрофы», «Квант», №11, 1992).

11-2. Предположим противное: существует такое n, что при любом натуральном m существует совершенное число $x = x(m) = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$ ($p_1, \ldots, p_n$ — простые числа, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — натуральные числа) такое, что $p_i \geq m$ при $i = 1, \ldots, n$. Поскольку x — совершенное число, то

$$2p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n} = \left(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + p_n + \ldots + p_n^{\alpha_n}\right) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}.$$

Учитывая, что $p_i \geq m$, получим

$$2 \leq \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n}{p_n - 1} \leq \left(\frac{m}{m-1}\right)^n.$$

Но правая часть неравенства стремится к единице при $m \to \infty$, что противоречит левой части неравенства.

Замечания. 1. Все четные совершенные числа имеют вид: $2^p\left(2^p - 1\right)$, где p и $2^p - 1$ — простые числа. Идея доказательства следующая. Отметим, что сумма делителей числа $x = 2^k(2m-1)$ делится на $2^k - 1$. Поэтому $2m - 1$ должно делиться на $2^k - 1$. Если при этом число $2^k - 1$ не простое, то сумма делителей числа x оказывается больше x. Но простота числа $2^k - 1$ возможна только при простом k.

2. Науке неизвестно, существуют ли нечетные совершенные числа.

11-3. Обозначим через L точку, в которой вписанная окружность касается прямой BC. Проведем прямую, параллельную BC, касающуюся вписанной окружности в точке N (эта прямая отсекает от угла BAC маленький треугольник, гомотетичный исходному, и для него окружность, вписанная в ABC, будет вневписанной).

Точки A, N и M лежат на одной прямой так как большой и маленький треугольники гомотетичны. NL — диаметр вписанной окружности, значит, точка O — середина NL. Теперь докажем, что $MK = KL$, этим будет доказано, что KO — средняя линия треугольника NLM, следовательно, $KO \parallel NM \parallel AM$.

Обозначим $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Можно выразить отрезок касательной к вписанной окружности через стороны треугольника: $CL = \frac{a+b-c}{2}$. Аналогично для вневписанной окружности $BM=\frac{a+b-c}{2}$. Поскольку $CL=BM$, и K— середина BC, то $LK=MK$.

11-4. *Ответ:* а) не может, б) может.

а) Покажем, что клякса не может жить вечно. Прежде всего отметим, что добавление черных точек не уменьшает множество черных точек в следующий момент времени, а стало быть, и во все последующие. Ограниченную кляксу можно докрасить до круга. Таким образом, можно считать, что клякса — круг.

Достаточно показать, что круг радиусом R в следующую секунду уменьшится до круга радиусом $R-\varepsilon$ и ε не уменьшается с уменьшением R. Последнее утверждение следует из того, что круг радиусом $r < R$ можно дополнить в каждой граничной точке до круга радиусом R с той же граничной точкой (см. рассуждение с добавлением черных точек).

Теперь покажем, что круг уменьшается. Назовем единичный круг с центром в точке A окрестностью точки A. Рассмотрим касательную к кругу в точке A и окрестность точки A. Ясно, что площадь черной области в этой окрестности меньше половины.

Поскольку площадь черной части в окрестности точки A меняется непрерывно при сдвиге A внутрь черного круга, то при достаточно малом сдвиге площадь черной части останется меньше половины. Поэтому круг уменьшается.

б) *Ответ:* может! Причина существования такой кляксы состоит в том, что белые участки внутри кляксы гибнут так же, как и сама клякса.

Участники пытались построить иерархическую систему круглых дыр, но не смогли довести идею до конца. Неудача связана с тем, что круги плохо «упаковываются». Возьмем более удобные дыры квадратной формы. Приведем несколько утверждений, из которых будет следовать решение задачи.

Лемма 1. Пусть плоскость составлена из «оконных рам» — белых квадратов с длинами сторон N, окаймленных черными рамками шириной 2. Тогда через конечное время она превратится в однородную черную плоскость.

Таким образом, если рамы взять достаточно большими, то плотность черных точек может увеличиться в любое число раз.

Лемма 2. Для любой точки влияние точек на расстоянии не меньше K сказывается не раньше чем через K секунд. (Доказательство по индукции.)

Лемма 3. При достаточно большом R отношение площади круга радиусом R к площади круга радиусом $R-K$ сколь угодно близко к единице.

Для решения задачи достаточно вырезать систему больших окон из круга с большим радиусом R.

11-5. *Ответ:* $Q(x) = \text{const}$, либо $Q(x) = x$.

Решение. Проверим, что указанные многочлены подходят. Если $P(x) \neq c$ при всех x, то $P(P(x)) = P(y) \neq c$. Если $P(x) \neq x$ при всех x, то в силу непрерывности либо $P(x) > x$, либо $P(x) < x$ при всех x. В первом случае $P(P(x)) > P(x) > x$, а во втором $P(P(x)) < P(x) < x$.

Проверим, что других решений нет. Проще всего искать контрпример в виде $P(x) = Q(x) - c$, поскольку тогда $P(x) \neq Q(x)$. Обозначим через $\deg(Q)$ степень многочлена Q.

Случай 1. $\deg(Q) = 1$. Тогда $Q(x) = ax+b$. Если $a \neq 1$, то в качестве $P(x)$ можно взять $Q(x) - 1$, а если $a=1$, то $x+b/2$.

Случай 2. $\deg(Q)$ — нечетное число, большее 1. Положим $P(x) = Q(x)-1$. Тогда $P(P(x)) - Q(x)$ есть многочлен степени $\deg(Q)^2$. Но многочлен нечетной степени всегда имеет корень (см. замечание 1).

Случай 3. $\deg(Q)$ — четное число, большее 0. Можно считать, что старший коэффициент многочлена Q положителен. (Поскольку подстановка $Q_1(x) = -Q(-x)$, $P_1(x) = -P(-x)$ изменяет знак старшего коэффициента, а свойства всех интересующих нас уравнений сохраняются.)

Пусть $P(x) = Q(x) - c$. При достаточно больших x имеем $P(P(x)) > Q(x)$. Если подобрать такое c, чтобы при некотором x значение $P(P(x))$ было меньше $Q(x)$, то в силу теоремы о промежуточном значении уравнение $P(P(x)) = Q(x)$ будет иметь решение.

Теперь подберем c. Пусть a — точка минимума $Q(x)$, x_0 — такая точка, что $Q(x_0) > a$. Положим $c = Q(x_0) - a$. Получим $P(P(x_0)) = P(a) = Q(a) - c < Q(x_0)$ — что нам и надо.

11-6. Вырежем наибольшее возможное стозначное число x_1. Среди чисел, находящихся в правом куске ленты и строго меньших числа x_1, вырежем наибольшее число x_2. Далее среди чисел, находящихся справа от второго числа и меньших его, вырежем наибольшее число x_3 и т.д. Возможны два случая:

1) Нам удастся вырезать 10 чисел $x_1, \ldots, x_{10}$, идущих в порядке убывания.

2) Мы вырезали меньше 10 чисел и каждое число, находящееся в правом куске, равно уже вырезанному.

Достаточно доказать, что если последовательность содержит не больше 9 различных кусков длиной 100, то какая-то комбинация цифр повторится 10 раз подряд.

Рассмотрим произвольный кусок длиной 100 и его сдвиги вправо на расстояния 0,1,…,9. Их 10, и по принципу Дирихле какие-то два из этих сдвигов совпадают. Остается показать, что если стозначное число u является началом числа su, где s — число, записываемое не более чем 9 знаками, то некоторая комбинация цифр в записи числа u повторится 10 раз подряд (под su мы понимаем не произведение, а результат приписывания числа u вслед за числом s).

В самом деле, если u — начало su, то su — начало $s^2u,\ldots,s^ku$ есть начало $s^{k+1}u$. Поэтому u есть начало s^ku при всех k, а значит, и бесконечной последовательности с периодом s. Поскольку число u стозначно, а число s содержит не более 9 цифр, его запись укладывается в запись числа u по крайней мере 10 раз.

Замечания. 1. Эту задачу решило трое участников. Один из них воспользовался следующим утверждением:

Если бесконечное слово содержит меньше чем $k+1$ различных подслов длиной k, то оно периодично, начиная с некоторого места.

2. Утверждение задачи справедливо и для ограниченных лент (имеющих длину по крайней мере $2000\cdot 10^{200}$). Доказательство основано на следующих соображениях.

а) Из ленты L такой длины можно вырезать 10 одинаковых кусков длиной 200 (которые не перекрываются). Обозначим такой кусок K.

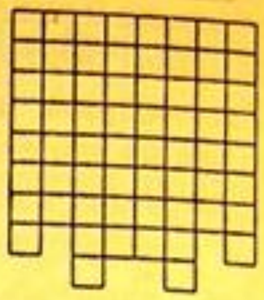
б) Если K содержит 10 различных подслов длиной 100, то из L можно вырезать 10 кусков длиной 100, идущих в порядке убывания (по одному из каждого экземпляра куска K: из первого самый большой, из второго следующий, и т.д., из последнего самый маленький).

в) Соображение со сдвигами, приведенное выше.

Можно доказать существование такого h, что если из ленты нельзя вырезать 10 кусков, идущих в порядке убывания, то она разрезается на l периодических частей, где $l \le h$, а величины периодов меньше 10. Это утверждение, называемое теоремой Ширшова о высоте, является одним из центральных результатов в комбинаторике слов и теории колец.

LVIII МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА (1995 г.)

7-6. Разрежьте изображённую фигуру на две части, из которых можно сложить целый квадрат 8×8.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

6 класс

6-1. После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

6-2. Разрежьте изображенную на рисунке 1 фигуру на две одинаковые части.

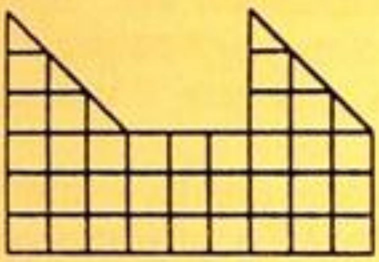


Рис.1

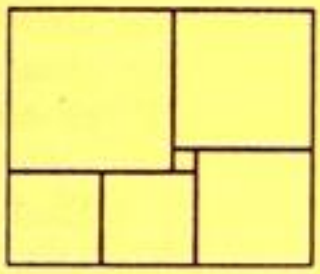


Рис.2

6-3. Прямоугольник составлен из шести квадратов (см. рисунок 2). Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.

$$\begin{array}{r} 1995 \\ \times\ \ {*}{*}{*} \\ \hline {*}{*}{*}{*}{*} \\ {*}\text{ГОД} \\ \hline \text{СВИНЬИ} \end{array}$$

6-4. Замените разные буквы разными цифрами, одинаковые — одинаковыми, а звездочки — любыми цифрами так, чтобы получился правильный пример на умножение.

6-5. В поединке любых двух борцов разной силы всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить ~~их~~ по трое на три команды так, чтобы во встречах команд по системе «каждый с каждым» по числу побед первая команда одержала верх над второй, вторая — над третьей, а третья над первой? 9 борцов

6-6. В квадрате 6×6 клеток отметьте несколько клеток так, чтобы из любой отмеченной можно было пройти в любую другую отмеченную, переходя только через общие стороны отмеченных клеток. Назовем отмеченную клетку концевой, если она граничит по стороне ровно с одной отмеченной. Нарисуйте а) 10, б) 11, в) 12 концевых клеток.

Задачи предложили: Д.Ботин (1), А.Ковальджи (2), И.Шарыгин (3,5), Е.Пронина (4), В.Ковальджи (6)

7 класс

7-1. Натуральное число умножили на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

7-2. Один сапфир и два топаза ценней, чем изумруд, в три раза.
А семь сапфиров и топаз его ценнее в восемь раз.
Определить мы просим Вас, сапфир ценнее иль топаз?

7-3. Фигура на рисунке 3 составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего, если сторона самого маленького равна 1.

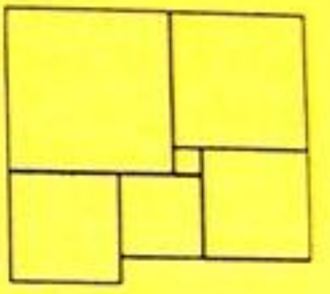


Рис.3

7-4. Расставьте скобки так, чтобы получилось верное равенство:

$$1-2\cdot3+4+5\cdot6\cdot7+8\cdot9=1995.$$

7-5. Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и т.д. После одиннадцати таких вычитаний впервые получился нуль. С какого числа начинали?

Задачи предложили: Р.Федоров (1), Д.Ботин (2), И.Шарыгин (3), И.Ященко (4), А.Спивак (5), С.Маркелов (6).

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

6 класс

6-1. *Ответ:* на четверть. Поскольку половина персиков составляла треть объема банки, половина оставшихся персиков составляет шестую часть первоначального объема. Остается сообразить, какую часть составляет $1/6$ от $2/3$. Для этого заметим, что $2/3 = 4/6$.

6-2. См. рисунок 4.

6-3. *Ответ:* в 7 раз. Пусть x — длина стороны самого большого квадрата. Тогда, двигаясь от большого квадрата по часовой стрелке, последовательно выразим через x стороны других квадратов: $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-3$. Из равенства верхней и нижней сторон прямоугольника получим уравнение $x+(x-1)=(x-2)+(x-3)+(x-3)$.

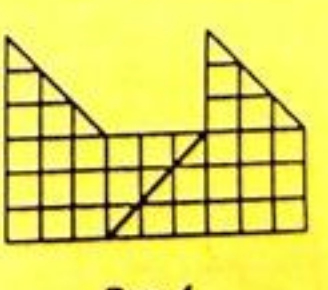
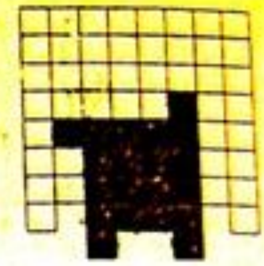


Рис.4

7-6.



6-4. *Ответ:*

$$\begin{array}{r} \times\ 1995 \\ 308 \\ \hline 11970 \\ 5985 \\ \hline 610470 \end{array}$$

Средняя цифра множителя *** равна нулю. Выпишем произведения 1995 на все цифры: 1995, 3990, 5985, 7980, 9975, 11970, 13965, 15960, 17955. Среди них есть четырехзначные и пятизначные. У числа *ГОД три последние цифры разные, поэтому числа 1995 и 3990 не подходят. У оставшихся четырехзначных чисел в разряде сотен стоит 9. Следовательно, Г = 9. Если бы *ГОД = 9975, то произошел бы перенос единицы в следующий разряд, и результат был бы не шестизначным, а семизначным. У оставшихся кандидатов 5985 и 7980 в разряде десятков стоит 8. Следовательно, О = 8. Поскольку 1995 оканчивается пятеркой, то одна из цифр И и Д равна 0, а другая — 5. Разберите два случая для И и Д и убедитесь, что ответ единственный.

6-5. Пронумеруем борцов в соответствии с их силой (больший номер побеждает меньший). Интуитивно ясно, что если такие команды существуют, то их общая сила примерно одинакова. Разобьем борцов сначала на три группы (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) и в каждую команду направим по одному представителю от каждой группы. Проверьте, что команды (1,5,9), (2,6,7), (3,4,8) удовлетворяют требованиям задачи.

Замечание. Интересно, что из номеров борцов в командах можно составить «магический» квадрат (у которого сумма любых трех чисел по строкам, по столбцам и по диагоналям одна и та же):

$$\begin{array}{ccc} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{array}$$

Оказывается, столбцы «магического» квадрата тоже дают решение задачи.

6-6. *Ответ* для 12 концов показан на рисунке 5.

Рис.5

7 класс

7-1. *Ответ:* $57 \cdot 5 \cdot 7 = 1995$. Разложим 1995 на множители: $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Искомое число не может быть ни однозначным, ни трехзначным, поэтому оно двузначно. Рассмотрим $3 \cdot 19$, $5 \cdot 19$, $7 \cdot 19$ и получим ответ.

Замечание. При разложении на множители мы не учли, что в числе могут быть цифры 1, и они не влияют на величину произведения. Поэтому мы должны были проверить и трехзначные числа $3\cdot5\cdot19$, $3\cdot7\cdot19$, $5\cdot7\cdot19$.

7-2. *Ответ:* одинаково. Из первых двух строк заключаем, что 8 сапфиров с 16-ю топазами равны по стоимости 24 изумрудам. И столько же стоят 21 сапфир с тремя топазами. Следовательно, 13 сапфиров равноценны 13 топазам.

7-3. *Ответ:* 4. Пусть x — длина стороны самого большого квадрата. Тогда, двигаясь от большого квадрата по часовой стрелке, последовательно выразим через x стороны других квадратов: $x-1$, $x-2$, $x-3$. Из равенства верхней и нижней сторон прямоугольника получим $x+(x-1)-(x-2)-(x-3)=$ $=4$.

7-4. *Ответ:* $(1-2)\cdot3+(4+5\cdot6\cdot7+8)\cdot9=1995$.

7-5. *Ответ:* любое число от 100 до 109. Разность между числом и суммой его цифр всегда делится на 9. Поэтому все числа, кроме исходного, должны делиться на 9. Следовательно, 0 получился из 9, 9 получилось из 18, и вообще, получаем цепочку:

$$0 \leftarrow 9 \leftarrow 18 \leftarrow 27 \leftarrow 36 \leftarrow 45 \leftarrow 54 \leftarrow 63 \leftarrow 72 \leftarrow 81.$$

Здесь нужно быть внимательными: 81 можно получить как из 90, так и из 99. Но 90 ни из какого числа не получишь. А 99 получается из 100, из 101, ..., из 109.

ШКОЛЬНЫЙ ТУР

5 класс

5-1. Внучке столько месяцев, сколько лет дедушке. Дедушке с внучкой 91 год. Сколько лет дедушке и сколько внучке?

5-2. Незнайка начертил три прямых линии и отметил на них 6 точек. Оказалось, что на каждой прямой он отметил 3 точки. Покажите, как он это сделал.

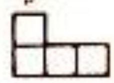
5-3. Три охотника варили кашу. Один положил 2 кружки крупы, второй — 1 кружку, а у третьего крупы не было. Они съели всю кашу поровну. Третий охотник и говорит: «Спасибо за кашу! — и вот вам задача: Я даю вам 5 патронов. Как поделить эти патроны в соответствии с вашим вкладом в мою порцию каши?»

5-4. Четыре мальчика выбирали водящего с помощью считалки. Тот, на кого падало последнее слово, выходил из круга, и счет повторялся заново. Считающий мальчик каждый круг начинал с себя и в результате стал водящим, причем счет каждый раз кончался перед ним. Какое наименьшее количество слов могло быть в считалке?

Задачи предложили: В.Жохов (1), А.Ковальджи (2, 3, 4)

6 класс

6-1. Миша был на рыбалке. До реки он шел пешком, а обратно ехал на велосипеде. На весь путь он затратил 40 минут. В другой раз он до реки и обратно ехал на велосипеде и затратил всего 20 минут. Сколько времени понадобится Мише, чтобы пройти путь в оба конца пешком?

6-2. Разрежьте клетчатый прямоугольник размером 5×8 на фигурки из четырех клеток вида  .

6-3. На окраску кубика $2\times 2\times 2$ требуется 1 грамм краски. Сколько краски потребуется для того, чтобы окрасить кубик $6\times 6\times 6$?

6-4. Кот Матроскин купил на 239 тыс.р. акций компании «М» по 13 тыс.р. за акцию и компании «ММ» по 15 тыс.р. за акцию. Сколько всего акций купил Матроскин?

Задачи предложили: А.Ковальджи (1, 2, 3), В.Жохов (4)

7 класс

7-1. Какие цифры надо поставить вместо букв A и $Б$, чтобы получилось верное равенство: $AБ\cdot A\cdot Б=БББ$? ($AБ$ — двузначное число, $БББ$ — трехзначное.)

7-2. В результате игры в «бодалки» Петя и Ваня вместе набили себе шишек в 3 раза больше, чем Толя, а Ваня и Толя — в 5 раз больше, чем Петя. Кто больше набил шишек: Петя и Толя вместе или Ваня?

7-3. В вершинах пятиугольника стоят рядом три фишки. Любую фишку разрешается сдвинуть вдоль диагонали на любое свободное поле. Можно ли получить такую позицию, в которой одна фишка осталась бы на старом месте, а две другие поменялись бы местами?

7-4. Отрезки AC и BD пересекаются. $AB = BC = CD = AD$. а) Докажите перпендикулярность отрезков AC и BD. б) Вычислите площадь фигуры $ABCD$, если $AC = 10$ см, $BD = 15$ см. (Пункты а и б считаются отдельными задачами.)

Задачи предложили: А.Ковальджи (1, 2, 3), Ю.Дудницын (4)

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

5 класс

5-1. Внучке 7 лет, дедушке 84 года.

5-2. Например, вершины треугольника и середины его сторон.

5-3. Второй охотник съел столько каши, сколько положил крупы, поэтому третий охотник от него не получил ничего. Все патроны нужно отдать первому охотнику.

5-4. В первом круге число слов должно делиться на 4, во втором — на 3, в третьем — на 2. Наименьший общий делитель этих чисел 12. Наименьшее количество слов 12.

6 класс

6-1. В один конец Миша идет на 20 минут дольше, чем едет. Значит в оба конца пешком он пройдет за 1 час.

6-2. Например, так, как на рисунке 6.

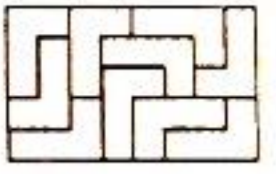


Рис.6

6-3. Каждая грань большого кубика в 9 раз больше по площади грани маленького, поэтому понадобится 9 г краски.

6-4. *Ответ:* 8 акций «М» и 9 акций «ММ». Заплатим сначала за каждую акцию по 13 тыс., а затем добавим за акции «ММ» по 2 тыс. По 13 тыс. можно заплатить 18 раз и еще 5 тыс. останется, но остаться должно четное число, поэтому по 13 тыс. надо заплатить 17 раз и оставить 18 тыс., тогда можно 9 раз добавить по 2 тыс.

Ответ единственный, поскольку любое другое четное число в остатке будет не меньше 18+26=34, а тогда акций «ММ» будет не меньше 17, но денег для этого мало.

7 класс

7-1. Сократим на $Б$ и получим $АБ \cdot А = 111$. Но $111 = 37 \cdot 3$, поэтому $А$=3, $Б$=7.

7-2. Толя набил $1/4$ шишек от общего количества. Петя набил $1/6$ от общего количества. Они вместе $1/4 + 1/6 < 1/2$. Итак, Толя и Петя набили меньше половины всех шишек, т.е. меньше, чем Ваня.

7-3. Заметим, что диагонали пятиугольника образуют замкнутый путь, иначе говоря, фишки ходят по «кругу», поэтому их порядок следования не может измениться.

7-4. *Ответ:* площадь равна 75 см . Треугольники ABD и BCD равнобедренные и равны по трем сторонам. Аналогично, ABC и ACD. Поэтому равны углы ABD и CBD. Поскольку BD — биссектриса равнобедренного треугольника ABC, то она является и его высотой. Пункт а) доказан.

Проведем через A, B, C, D прямые, параллельные AC и BD, получим прямоугольник, площадь которого в два раза больше площади $ABCD$.

ОКРУЖНОЙ ТУР

8 класс

8-1. Прямая m — график функции $y = 3x + 6$. Нарисуйте ее, а также две прямые, симметричные ей относительно оси ординат и относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Графиками каких линейных функций являются эти прямые? Ответ обоснуйте.

8-2. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, выходящих из той же вершины.

8-3. У кассира есть 30 монет: 10, 15 и 20 копеек на сумму 5 рублей. Докажите, что 20-копеечных монет у него больше, чем 10-копеечных.

8-4. У 10 детей по 2 флажка: синий и белый. Один флажок поднят, другой опущен. Каждый участник считает сколько флажков синего цвета поднято другими и, если это число четное, то он не меняет флажок, а если нечетное, то меняет. Все изменения происходят одновременно раз в минуту. Вася говорит, что он трижды поднимал синий флажок. Не ошибся ли он?

8-5. Встретились два математика. Вот их диалог: — У тебя два сына? — Да, маленькие, в школу не ходят. Кстати, произведение их лет равно числу голубей возле нас. — Этих данных недостаточно. — А старшего я назвал твоим именем. — Теперь я знаю, сколько им лет. Сколько лет сыновьям?

Задачи предложили: А.Ковальджи (1, 2, 3), Б.Френкин (4), В.Ковальджи (5)

9 класс

9-1. Длины сторон треугольника 5, 7, 9. Докажите, что существует число x такое, что $5+x$, $7+x$, $9+x$ — длины сторон прямоугольного треугольника.

9-2. Дан треугольник ABC. Из произвольной точки O отложили векторы $OA_1 = AB$, $OB_1 = BC$, $OC_1 = CA$. Концы векторов соединили. Во сколько раз площадь треугольника $A_1B_1C_1$ больше площади данного?

9-3. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + (y-4)^2 = a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

9-4. У каждого из n человек появилась своя новость. Они посылают друг другу телеграммы, в которых сообщают все известные им новости. Какое наименьшее количество телеграмм нужно послать, чтобы все узнали все новости?

9-5. На клетчатой бумаге по линиям сетки начертили прямоугольник со сторонами 1994 на 1995. Сколько клеток пересекает диагональ прямоугольника?

Задачи предложили: В.Сендеров (1), С.Маркелов (2), А.Ковальджи (3, 4, 5)

10 класс

10-1. $\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = 1, \\ \sin\alpha + \sin\beta = a. \end{cases}$ Докажите, что $a \le \sqrt{3}$.

10-2. Докажите теорему: если три плоскости попарно пересекаются по трем различным прямым, то либо прямые проходят через одну точку, либо они параллельны.

10-3. Найдите максимальное значение $f(n) = \dfrac{n}{1{,}01^n}$ при натуральном n.

10-4. Три кузнечика сидели в ряд на расстоянии 1 м. Каждую секунду один из них прыгал через другого в симметричную точку (Новая точка — на той же прямой и на таком же расстоянии). Через некоторое время кузнечики оказались на исходных местах. Докажите, что средний кузнечик не мог оказаться крайним.

10-5. Докажите, что для графика $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

а) точка (0; 0) не является центром симметрии;

б) никакая точка плоскости не является центром симметрии.

Задачи предложили: А.Галочкин (1), Е.Глаголева (2), А.Канель-Белов (3, 5), Б.Френкин (4)

11 класс

11-1. Изобразите множество точек плоскости, задаваемых условиями $0 \le y \le |x^2 - 2x|$, $|x - 1| \le 2$ и найдите площадь полученной фигуры.

11-2. Все главные диагонали параллелепипеда равны. Докажите, что этот параллелепипед прямоугольный.

11-3. Докажите неравенство при любом натуральном $n > 1$

$$(1 - 1/4)(1 - 1/9)\ldots(1 - 1/n^2) > 1/2.$$

11-4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 13} = a$$

имеет единственное решение?

11-5. У некоторого числа 2000 делителей. Докажите, что это число больше миллиона. (Делители натуральные.)

Задачи предложили: С.Саакян (1, 4), А.Канель-Белов (2), А.Ковальджи (3, 5)

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 класс

8-1. *Ответ:* $y = -3x + 6$, $y = \frac{1}{3}x - 2$. Можно искать координаты точек пересечения прямой с осями, а потом выводить уравнение, но можно поступить изящнее. При отражении ось Ox меняет направление, поэтому в уравнении надо заменить x на $-x$. При симметрии относительно биссектрисы оси Ox и Oy меняются местами, поэтому вместо уравнения $y=3x+6$ получится уравнение $x=3y+6$.

8-2. Достроим треугольник до параллелограмма так, чтобы медиана стала половиной диагонали. Из неравенства треугольника следует, что диагональ (равная удвоенной медиане) меньше суммы двух соседних сторон параллелограмма. Отсюда получаем требуемое.

8-3. *Ответ*: 20-копеечных больше. Если заменить 10+20 на 15+15, то число монет и сумма денег не изменятся. Проведем такие замены, пока не кончатся 10-ти или 20-ти копеечные монеты. Если бы все 30 монет оказались по 15, то сумма была бы 450. Значит некоторые монеты больше 15.

8-4. Если число поднятых синих флажков было четным, то красные флажки останутся поднятыми, а синие флажки сменятся на красные, после чего изменений не будет. Если число синих флажков было нечетным, то все красные флажки сменятся на синие, а синие флажки останутся поднятыми, после чего изменений не будет.

8-5. *Ответ*: 1 и 4 года. Сыновьям не больше 6 лет. Сообщение о старшем сыне исключает вариант, когда возрасты равны. Но если возрасты могли быть равны, то произведение лет является квадратом. Поэтому все варианты можно записать в виде $(n/k, kn)$, где $2 \le k \le n$ и $2 \le kn \le 6$. Отсюда $k = 2$, $n = 2$.

9 класс

9-1. *Ответ*: 6, 8, 10. Решая квадратное уравнение $(5+x)^2 + (7+x)^2 = (9+x)^2$, находим $x = -7$, $x = 1$.

9-2. *Ответ*: 3. Достаточно доказать, что равны площади $OA'B'$ и ABC. Построим вектор $A'D = BC$. Треугольники $OA'D$ и ABC равны. Площадь каждого равна половине площади параллелограмма $OA'DB'$. Но площадь $OA'B'$ тоже равна половине $OA'DB'$.

9-3. *Ответ*: $a = 16$, $a = 36$. Система задает две окружности с центрами в точках (3;0) и (0;4). Точка пересечения окружностей единственная, когда они касаются (внешним или внутренним образом). Расстояние между центрами равно 5.

9-4. *Ответ*: $2n-2$. До момента, когда появится человек, знающий все новости, послано не меньше $n-1$ телеграмм. После этого остальные $n-1$ человек получат не меньше $n-1$ телеграммы.

9-5. *Ответ*: 3988. Диагональ пересекает 1993 вертикальных и 1994 горизонтальных прямых. Каждое пересечение есть переход из одной клетки в другую, да еще пересечена первая клетка. (Важно, что прямая не пересекает узлов сетки внутри прямоугольника.)

10 класс

10-1. Возведем оба уравнения в квадрат и сложим. Поскольку $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, то получим

$$2 + 2\cos(\alpha-\beta) = 1 + a^2 \Rightarrow a^2 \le 3.$$

10-2. Если какие-то две прямые пересекаются, то точка их пересечения принадлежит всем трем плоскостям, а значит и всем трем прямым. Если никакие две прямые не пересекаются, то они все параллельны, поскольку каждые две прямые лежат в одной плоскости.

10-3. *Ответ*: $f(100)$. Действительно, $f(n+1)=f(n)\dfrac{1+1/n}{1{,}01}$ — возрастает при $n \le 99$.

10-4. Пусть кузнечики сидят на числовой прямой в точках 0, 1, 2. Координаты кузнечиков меняются на четное число, поэтому крайние кузнечики прыгают по четным числам, а средний — по нечетным.

10-5. а) Допустим, что (0; 0) — центр симметрии, тогда функция $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ является нечетной. Но тогда $f(x) = -f(-x) \Rightarrow x^4+bx^2+d = 0$ — тождество. Противоречие.

б) Допустим, что $(x_0;\ y_0)$ — центр симметрии графика. Перенесем начало координат в эту точку, т.е. сделаем замену переменных $x = x_0 + z$, $y = y_0 + t$, тогда уравнение примет вид $t = z^4 + a_1z^3 + b_1z^2 + c_1z^2 + d_1$, для которого мы уже доказали, что точка (0; 0) не является центром симметрии.

11 класс

11-1. *Ответ*: 4. В самом деле, $\int\limits_{-1}^{3} |x^2 - 2x|\, dx =$

$$= \int\limits_{-1}^{0}(x^2-2x)dx + \int\limits_{0}^{2}(2x-x^2)dx + \int\limits_{2}^{3}(x^2-2x)dx = \frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}.$$

11-2. Сечение ACC_1A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник. $AA_1 \perp AC$. Аналогично $BB_1 \perp BD$. Но $AA_1 \| BB_1$, поэтому отрезок AA_1 перпендикулярен плоскости основания, поэтому параллелепипед прямой. Поскольку $AC=BD$, то в основании прямоугольник.

11-3.

$$\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\dots\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\dots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}>\frac{1}{2}.$$

11-4. Обозначим $y=x^2-4x+5$, тогда $\sqrt{y}+\sqrt{y+8}=a$. Если при некотором a существует решение y, то уравнение $x^2-4x+5=$ $=y$ должно иметь единственное решение $x \Rightarrow y=1 \Rightarrow a=3$. Поскольку функция $\sqrt{y}+\sqrt{y+8}$ монотонно возрастает, то при $a=3$ решение $y=1$ единственное.

11-5. Все делители числа n можно разбить на пары (если n не квадрат), в которых одно число меньше $\sqrt{n}$, а второе — больше $\sqrt{n}$ (если d меньше $\sqrt{n}$, то n/d больше $\sqrt{n}$). Итак, количество делителей меньше, чем $2\sqrt{n}$. Но тогда $2\sqrt{n}>2000$, откуда $n>1\ 000\ 000$.

ГОРОДСКОЙ ТУР

8 класс

8-1. М.В.Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены еще раз вырастут на 20%?

8-2. Докажите, что все числа вида 1007, 10017, 100117, ... делятся на 53.

8-3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка O внутри него. Известно, что $\angle AOB=\angle COD=120^\circ$, $AO=OB$ и $CO=OD$. Пусть K, L и M — середины отрезков AB, BC и CD соответственно. Докажите, что а) $KL=LM$; б) треугольник KLM — правильный.

8-4. Хватит ли для изготовления закрытой со всех сторон прямоугольной коробки с целочисленными измерениями объемом не меньше 1995 единичных кубиков а) 962; б) 960; в) 958 квадратных единиц материала?

8-5. Несколько деревень соединены дорогами с городом, а между ними дорог нет. Автомобиль отправляется из города с грузами сразу для всех деревень. Стоимость каждой поездки равна произведению веса всех грузов в кузове на расстояние. Докажите, что если вес каждого груза численно равен расстоянию от города до пункта назначения, то общая стоимость перевозки не зависит от порядка, в котором объезжаются деревни.

8-6. Прямая отсекает от правильного шестиугольника $ABCDEF$ треугольник AKN так, что $AK + AN = AB$. Найдите сумму углов, под которыми отрезок KN виден из вершин шестиугольника ($\angle KAN + \angle KBN + \angle KCN + \angle KDN + \angle KEN + \angle KFN$).

Задачи предложили: В.Ковальджи (1,5), А.Галочкин (2), С.Маркелов (3), Д.Ботин (4), В.Произволов (6)

9 класс

9-1. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то полученное число делится на 19.

9-2. Дан равносторонний треугольник ABC. Для произвольной точки P внутри треугольника рассмотрим точки A' и C' пересечения прямых AP с BC и CP с BA соответственно. Найдите геометрическое место точек P, для которых отрезки AA' и CC' равны.

9-3. Прямоугольник размерами $1 \times k$ при всяком натуральном k будем называть полоской. При каких натуральных n прямоугольник размерами $1995 \times n$ можно разрезать на попарно различные полоски?

9-4. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab = cd$. Может ли число $a+b+c+d$ быть простым?

9-5. Даны четыре одинаковых прямоугольных треугольника. Каждым ходом один из имеющихся треугольников разрезается по высоте (выходящей из прямого угла) на два других. Докажите, что после любого количества ходов среди треугольников найдутся два одинаковых.

9-6. Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на банках стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может всем это доказать (т.е. обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашках. Докажите, что ему для этой цели а) достаточно четырех взвешиваний; б) недостаточно трех взвешиваний.

Задачи предложили: А.Галочкин (1), С.Маркелов (2), Ю.Чеканов (3), А.Егоров (4), А.Шаповалов (5), А.Толпыго (6)

10 класс

10-1. Известно число $\sin\alpha$. Какое наибольшее число значений может принимать а) $\sin\alpha/2$, б) $\sin\alpha/3$?

10-2. См. задачу 9-2.

10-3. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K. На боковых сторонах трапеции, как на диаметрах, построены окружности. Точка K лежит вне этих окружностей. Докажите, что длины касательных, проведенных к этим окружностям из точки K, равны.

10-4. См. задачу 9-5.

10-5. Целые числа a, b и c таковы, что числа $a/b + b/c + c/a$ и $a/c + c/b + b/a$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

10-6. На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из этого набора. Докажите, что нажимая на кнопки, можно погасить все лампочки.

Решения предложили: С.Маркелов (1,2,3), А.Шаповалов (4), А.Грибалко (5), А.Канель-Белов (6)

11 класс

11-1. Докажите, что
$$|x| + |y| + |z| \le |x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z|,$$
где x, y, z — действительные числа.

11-2. Можно ли ребра n-угольной призмы раскрасить в 3 цвета так, чтобы на каждой грани были все 3 цвета и в каждой вершине сходились ребра разных цветов, если а) $n = 1995$; б) $n = 1996$.

11-3. В треугольнике ABC AA_1 — медиана, AA_2 — биссектриса, K — такая точка на AA_1, что $KA_2 \parallel AC$. Докажите, что $AA_2 \perp KC$.

11-4. Разделите отрезок $[-1;1]$ на черные и белые отрезки так, чтобы интегралы любой а) линейной функции; б) квадратного трехчлена по белым и черным отрезкам были равны.

11-5*. Для какого наибольшего n можно придумать две бесконечные в обе стороны последовательности A и B такие, что A имеет период 1995, любой кусок последовательности B длиной n содержится в A, но B непериодична или имеет период другой длины?

11-6*. Докажите, что существует бесконечно много таких составных n, что $3^{n-1} - 2^{n-1}$ кратно n.

11-7*. Существует ли такой многогранник и точка вне него, что из этой точки не видно ни одной из его вершин?

Задачи предложили: А.Галочкин (1, 2), И.Шарыгин (3), Г.Кондаков (4), А.Канель-Белов (5, 7), В.Сендеров (6), С.Маркелов (7)

8 класс

8-1. *Ответ:* денежки на квас хватит. До повышения цен: денежка = хлеб + квас. После повышения цен: денежка = (0,5 хлеба + квас)·1,2. Из этих уравнений: 2 хлеба = квасу. Выразим денежку через квас: денежка = 1,5 кваса. После второго повышения цен: квас·1,2·1,2 = 1,44 кваса < 1,5 кваса = денежка

8-2. Заметим, что разность двух соседних чисел вида 1001…17 равна 9010…0 — делится на 53 и первое число 10017 делится на 53. Отсюда следует, что все такие числа делятся на 53.

8-3. При повороте на 120° вокруг точки O отрезок AC переходит в BD, а значит, они равны. Отрезки KL и LM параллельны и вдвое меньше отрезков AC и BD соответственно (как средние линии треугольников AOC и BOD). Но при повороте на 120° угол между отрезками KL и LM получается 60°, поэтому треугольник KLM правильный.

8-4. *Ответ:* коробка размерами $11\times13\times14$. Объем такой коробки равен 2002, т.е. достаточен; а общая площадь ее стенок равна $2\cdot(11\cdot13+11\cdot14+13\cdot14) = 958$.

8-5. Занумеруем грузы $a_1, a_2, \dots a_n$ в том порядке, в каком их развозят, тогда стоимость перевозки равна

$$a_1(a_1+2a_2+2a_3+\ldots+2a_n)+a_2(a_2+2a_3+\ldots+2a_n)+$$
$$+a_{n-1}(a_{n-1}+2a_n)+a_n^2=(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2.$$

Получилось выражение, которое не зависит от порядка нумерации грузов.

8-6. *Ответ:* 240°. *Указание.* Рассмотрите отрезки, в которые переходит KN при повороте данного шестиугольника вокруг его центра на 60°, 120°, 180° и т.д.: они тоже образуют правильный шестиугольник. Осталось найти сумму углов, под которыми его стороны видны из точки A.

9 класс

9-1. См. решение задачи 8-2.

9-2. *Ответ:* высота треугольника ABC, выходящая из вершины B, а также дуга окружности с концами A, C и величиной 120°, лежащая внутри треугольника ABC.

Решение. Выберем произвольную точку A' на BC и проведем отрезок AA'. Среди отрезков с началом в точке C и концом на стороне AB имеются только два, равных отрезку AA' — это отрезки CC' и CC'', где точки C' и C'' таковы, что $BC' = BA'$ и $AC'' = BA'$.

Точка пересечения AA' и CC' лежит на высоте треугольника ABC выходящей из вершины B. В силу симметрии все точки на этой высоте удовлетворяют условию задачи.

Пусть P — точка пересечения AA' и CC''. Заметим, что CC'' переходит в AA' при повороте вокруг центра треугольника на 60°. Поэтому $\angle APC = 120°$. Это значит, что точка P лежит на дуге окружности, проходящей через точки A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. И наоборот, все точки этой дуги удовлетворяют условию (подумайте, почему).

9-3. *Ответ:* при $n \leq 998$ и при $n \geq 3989$.

Идея решения: возьмем максимальную полоску (равную максимальной стороне прямоугольника). Остальные полоски будем объединять в пары, дающие в сумме максимальную полоску. В процессе заполнения прямоугольника такими «длинными» полосками произойдет одно из двух: либо мы заполним прямоугольник (тогда задача решена), либо нам не хватит полосок (тогда задача неразрешима).

Рассмотрим два случая: $n \leq 1995$ и $n > 1995$.

В первом случае разрежем прямоугольник на n полосок длиной 1995. Первую сохраним, вторую разрежем на две полоски длиной 1 и 1994, третью — на две полоски длиной 2 и 1993 и т.д. Последняя полоска $1 \times n$, которую мы сможем разрезать, будет иметь номер не больше 998 (997+998=1995).

Во втором случае разрежем прямоугольник на 1995 полосок длиной n. Первую сохраним, вторую разрежем на две полоски длиной 1 и $n-1$ и т.д. Общая площадь всех полосок равна $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$. С другой стороны, площадь прямоугольника $1995n$. Поэтому необходимо $(n+1)/2 \geq 1995$. Отсюда $n \geq 2 \cdot 1994 + 1 = 3989$. Этого условия и достаточно.

Замечание. Отметим, что группировка чисел 1 и $n-1$, 2 и $n-2$, и т.д. используется при выводе формулы для суммы членов арифметической прогрессии.

9-4. *Ответ:* не может. Из условия следует $a+b+c+d = a+b+c+ab/c = (a+c)(b+c)/c$ — целое число. Дробь сократима. Поскольку оба сомножителя больше знаменателя, то после сокращения от каждого из них останется число большее единицы.

9-5. *Решение 1.* Заметим, что порядок, в котором разрезали треугольники, неважен (в том смысле, что конечный результат от этого не зависит).

Поскольку первоначально имеется четыре одинаковых треугольника, три из них придется разрезать. Сделаем сначала эти три разреза. В результате образуются две тройки одинаковых треугольников. В каждой из этих троек придется разрезать по два треугольника. Сделаем эти разрезы. После этого у нас опять образуются четыре одинаковых треугольника!

Теперь оформим идею. Предположим, что такое разрезание возможно. Рассмотрим наименьшее число n разрезаний, при котором из четырех одинаковых треугольников получаются попарно различные. Поскольку порядок разрезаний неважен, сделаем сначала описанные выше 7 разрезаний. Получим снова 4 одинаковых треугольника, для разрезания которых потребуется не меньше n разрезаний. Противоречие.

Решение 2. Пусть гипотенузы исходных треугольников равны 1, а их катеты — p и q. Тогда все получаемые разрезаниями треугольники подобны исходному с коэффициентом вида $p^m q^n$. При разрезании такого треугольника, назовем его треугольником типа (m,n), получаются два — типа $(m+1,n)$ и $(m,n+1)$. Задачу можно переформулировать для целых координат точек так: *в вершине первого квадранта стоят 4 фишки. Любую фишку можно заменять на две соседние (сверху и справа). Докажите, что нельзя добиться того, чтобы все фишки стояли в разных клетках.*

Запишем в каждую клетку число и назовем весом фишки то число, на котором она стоит. Тогда в процессе деления фишек сумма весов не будет меняться. Для этого в клетку с координатами (x,y) можно записать число $2^{-(x+y)}$.

В начальный момент сумма весов фишек равна 4. Сумма чисел, записанных во всех клетках, тоже равна 4. Поэтому, если фишки стоят в разных клетках, то сумма их весов меньше 4. Следовательно, переход невозможен.

9-6. Начнем с решения пункта б). Каждым взвешиванием банки делятся на три группы — банки на левой чашке, банки на правой чашке и банки, не участвующие во взвешивании. Самое большее, что могут узнать геологи в результате одного взвешивания — это определить, какой набор банок лежит в каждой группе.

После первого взвешивания в одной из групп будет не меньше трети всех банок, т.е. не меньше 27; при этом для геологов (кроме завхоза) они будут неразличимы. При втором взвешивании эта группа также разделится на 3 группы, в одной из которых будет не меньше 9 банок, неразличимых для геологов. При третьем взвешивании из этих 9 банок в одну из новых групп попадут не меньше трех банок. Поэтому трех взвешиваний недостаточно.

а) Нужно стремиться к тому, чтобы группы делились на три равные части. Для этого введем еще одну банку с нулевым весом.

Чтобы по разнице весов можно было определить, какие наборы банок лежат на чашках, необходимо на одну из них класть самые легкие банки, а на другую — самые тяжелые.

Но уже после первого взвешивания у завхоза появятся три набора банок. Покажем, как ему действовать с несколькими наборами одновременно.

Лемма. Дано несколько наборов по $3k$ банок. Каждый набор делится на три кучи по k банок, одна из которых кладется на левую чашку, а другая — на правую. Разность показаний весов будет максимальна, если на левую чашку весов кладутся самые легкие банки из каждого набора, а на правую — самые тяжелые. Такая разность однозначно определяет составы всех куч.

Теперь все готово для решения задачи. Каждое взвешивание измельчает кучи в три раза. После четырех измельчений каждая «куча» будет состоять из одной банки. Задача решена.

Замечание. Похожим образом решаются задачи на нахождение фальшивой монеты за минимальное число взвешиваний, а также задачи на угадывание задуманного числа за наименьшее число вопросов, на которые отвечают «да» или «нет». В последнем случае, поскольку возможно только 2 ответа, происходит деление числа вариантов пополам. Все эти задачи относятся к теории информации.

10 класс

10-1. *Ответ:* а) 4; б) 3 значения.

а) Если $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$, то $\sin\alpha/2$ может принимать 4 значения ($\sin\pi/6$, $\sin\pi/3$, $\sin 7\pi/6$, $\sin 4\pi/3$). Покажем, что больше четырех значений быть не может. Если $\sin\beta = \sin\alpha$, то $\beta = \alpha + 2\pi k$ либо $\beta = \pi - \alpha + 2\pi k$. Соответственно $\beta/2 = \alpha/2 + \pi k$ либо $\beta/2 = (\pi - \alpha)/2 + \pi k$. Этим значениям соответствуют точки на единичной окружности: $\alpha/2$, $\alpha/2 + \pi$, $\pi/2 - \alpha/2$, $3\pi/2 - \alpha/2$ и только они (некоторые из этих точек могут совпадать).

б) Если $\sin\alpha = 0$, то $\sin\alpha/3$ может равняться 0, $\sin 2\pi/3$, $\sin 4\pi/3$. Покажем, что $\sin\alpha/3$ не может принимать больше трех значений. Можно рассуждать, как в пункте а), но лучше действовать короче: пусть $t = \sin\alpha/3$; тогда $\sin\alpha = -4t^3 + 3t$, а многочлен третьей степени имеет не больше трех корней.

Замечания. 1. Если $\sin n\varphi$ задан, то $\sin\varphi$ при нечетном n всегда принимает n различных значений (отвечающих углам вида $\varphi + 2\pi k/n$), а при четном n может принимать не более $2n$ различных значений (отвечающих углам вида $\varphi + 2\pi k/n$ и вида $-\varphi + (2k+1)\pi/n$).

10-2. См. решение 9-2.

10-3. *Идея решения:* достаточно доказать, что произведение отрезков секущих к окружностям, проведенных из точки K, равны.

Пусть боковые стороны трапеции — AB и CD. Обозначим через M и N вторые точки пересечения прямых AC и BD соответственно окружностей с диаметрами AB, CD. По теореме о касательной и секущей, квадраты касательных к окружности, проведенных из точки K, равны $KM \cdot KA$ и $KN \cdot KD$. Значит, нам надо доказать, что $KM \cdot KA = KN \cdot KD$. Для этого докажем, что точки A, M, N, D лежат на одной окружности.

Поскольку $\angle AMB$ опирается на диаметр, $\angle AMB = 90°$. Значит, $\angle BMC = 90°$. Аналогично, $\angle BNC = 90°$. Поэтому точки B, M, N и C лежат на окружности с диаметром BC, откуда $\angle CMN = \angle CBN = \angle BDA$ (так как $BC \parallel AD$). Но тогда $\angle AMN + \angle NDA = 180°$, поэтому точки A, M, N, D лежат на одной окружности. По теореме о произведении всей секущей на ее внешнюю часть $KM \cdot KA = KN \cdot KD$. Задача решена.

10-4. См. решение 9-5.

10-5. Числа a, b и c можно сокращать на общий множитель. Поэтому будем считать, что НОД$(a,b,c)=1$. Если при этом среди чисел a, b и c есть число, отличное от ± 1, то найдется простое p, делящее одно из этих чисел и не делящее другое.

Покажем, что p входит в знаменатель одной из несократимых дробей $r_1 = a/b + b/c + c/a$ или $r_2 = b/a + c/b + a/c$. Тогда это число не может быть целым.

Пусть $k(x)$ — максимальная степень p в разложении x на простые множители. Можно считать, что $k(a)$ максимальна, тогда $k(a) > 0$. Возможны два случая: $k(a) \geq k(b) \geq k(c) = 0$ или $k(a) \geq k(c) \geq k(b) = 0$. В первом случае r_1 есть сумма двух дробей со знаменателями, не делящимися на p, и несократимой дроби со знаменателем, делящимся на p. Получаем, что знаменатель r_1 делится на p, т.е. r_1 не является целым. Аналогично, во втором случае r_2 не будет целым.

10-6. *Указание.* Все лампочки, кроме любой одной, можно погасить (индукция по числу лампочек). Затем можно менять состояние любых двух лампочек. Отсюда, используя условие о четности, можно зажечь четное число лампочек и погасить их парами.

Решение. Заметим, что результат нажатия нескольких кнопок не зависит от порядка их нажатия. Проведем индукцию по числу лампочек. При $n = 1$ утверждение верно. Пусть мы умеем гасить $n-1$ лампочку. Докажем утверждение для n лампочек. Погасим произвольные $n-1$ лампочку. Если погасла и последняя, то индуктивный переход сделан. А если любая последняя лампочка всегда горит, то обозначим необходимый для этого набор кнопок через S_i, где i — номер горящей лампочки.

Заметим, что S_iS_j — результат последовательного применения S_i и S_j — меняет состояние у двух лампочек с номерами i и j и только у них. Итак, мы научились менять состояние у любой пары лампочек.

По условию найдется кнопка T, соединенная с нечетным числом лампочек. Погасим все лампочки, кроме одной, соединенной с кнопкой T. Затем нажмем T. Тогда будет гореть четное число лампочек. Погасим их парами.

Замечания. 1. Обычно в задачах про лампочки или таблицы, где задан набор операций, доказывается невозможность получить определенное состояние. Для этого используется инвариант — четность числа горящих лампочек в некоторых подмножествах. Оказывается, что если нет ни одного подмножества, в котором сохраняется четность числа горящих лапочек, то все лампочки можно погасить.

2. Данное решение можно перевести на язык линейной алгебры. Описанный здесь процесс перехода к новым операциям есть, в сущности, широко известный метод Гаусса, используемый для построения базиса линейного пространства и решения систем линейных уравнений.

11 класс

11-1. $(x+y-z)+(x-y+z)=2x$, откуда $|x+y-z|/2+|x-y+z|/2\geq|x|$ (модуль суммы не превосходит суммы модулей). Напишем аналогичные неравенства для y и z и сложим их с этим неравенством.

11-2. а) Можно. Покрасим ребра нижнего основания по кругу: 1-е в первый цвет, 2-е во второй, 3-е в третий, 4-е опять в первый и т. д. (1995 делится на 3, поэтому цепочка замкнется). Каждое ребро верхнего основания покрасим в цвет ребра нижнего основания, находящегося под ним. Каждое боковое ребро, выходящее из вершины, где сходятся два цвета, покрасим в недостающий цвет. Ясно, что на всех боковых гранях присутствуют все 3 цвета.

б) Нельзя. Пусть призма покрашена требуемым образом; тогда в основании есть 3 ребра всех трех цветов, идущие подряд (иначе основание раскрашено с периодом 2 и не может быть покрашено в три цвета). Несложно проверить, что раскраска этого участка однозначно определяет раскраску участка, находящегося над ним, соответствующих боковых ребер и следующих ребер основания. Таким образом, раскраска этих трех ребер однозначно определяет раскраску следующего ребра и нижняя грань окажется покрашенной с периодом 3. Но 1996 не делится на 3 и цепочка не замкнется.

11-3. Продлим медиану AA_1 на ее длину и достроим треугольник до параллелограмма $ABDC$. Поскольку биссектриса делит основание треугольника на отрезки, пропорциональные сторонам, то KA_2 делит AD в такой же пропорции (по теореме Фалеса).

Достаточно доказать, что прямая, выходящая из точки C и перпендикулярная биссектрисе, делит AD в таком же отношении.

Действительно, продлим стороны треугольника ABC из точки A до равнобедренного треугольника со сторонами $AC+AB$. В новом треугольнике биссектриса является высотой. По теореме Фалеса получаем, что AD делится в нужном отношении.

11-4. Докажем по индукции, что любой отрезок можно разбить на белые и черные отрезки так, что интегралы любого многочлена степени не выше n по черным и белым отрезкам равны. Для $n=0$ разделим отрезок пополам. Пусть для n разбиение сделано, тогда для $n+1$ первую половину отрезка разобьем, как для n, вторую — так же (разбиение можно переносить, так как перенос — линейная замена переменной), а потом на второй половине белые отрезки перекрасим в черные и наоборот. Для многочлена $f(x)$ разность его интегралов по белым и черным отрезкам — это разность интегралов многочлена $f(x)-f(x-a/2)$ (где a — длина исходного отрезка) по белым и черным частям первой половины отрезка. Но если степень многочлена $f(x)$ не выше $n+1$, то степень многочлена $f(x)-f(x-a/2)$ не выше n.

Замечания. 1. Интересен вопрос о минимально возможном общем числе интервалов. Для квадратных многочленов это число равно 4.

2. Идея решения этой задачи заключается в разностном дифференцировании. Она встречается довольно часто (например, при решении проблемы Варинга о представлении чисел в виде суммы ограниченного числа равных степеней).

3. Если пометить знаками «+» черные отрезки и знаками «−» — белые, то знаки образуют начальный участок последовательности Морса. Эта последовательность строится так: +, +−, +−−+, +−−+−++−, +−−+−++−−++−+−−+, ... (От куска A переходим к куску AA', где A' получается из A заменой всех знаков на противоположные.) Последовательность Морса появляется в самых разных ситуациях. В этой

последовательности никакая комбинация символов не повторится 3 раза подряд.

11-5*. *Ответ:* 1995.

Пример, когда период последовательности A состоит из одной единицы и 1994 нулей, а B — непериодическая последовательность, в которой все единицы расположены на расстоянии не меньшем 1994 друг от друга, показывает, что условие совпадения кусков длины 1994 не является достаточным.

Очевидно, что если все куски последовательности B длиной 1996 содержатся в A, то B периодична (у всех таких кусков в A первый и последний символы одинаковы и находятся на расстоянии 1995). Итак, достаточно показать, что совпадение кусков длины 1995 влечет совпадение кусков длины 1996. Задача сводится к лемме:

Лемма. В последовательности A с периодом n каждый кусок длиной $n-1$ однозначно продолжается до куска длиной n.

Доказательство. Для каждого символа количество его вхождений в куски длиной 1995 последовательности A постоянно. По этим количествам однозначно восстанавливается один недостающий символ.

Замечание. Если n — минимальный период последовательности, то любые два одинаковые куска длиной $n-1$ находятся на расстоянии, кратном n.

11-6. Будем искать делитель данного числа в таком же виде: 3^k-2^k. Положим $k=2^t$, $n=3^{2^t}-2^{2^t}$, где $t\ge 2$. Воспользуемся тем, что при натуральном k и различных целых x, y число x^k-y^k делится на $x-y$. Теперь для доказательства того, что $3^{n-1}-2^{n-1}$ делится на n, достаточно доказать, что показатель $n-1$ делится на 2^t, т.е. что $3^{2^t}-1$ делится на 2^t (поскольку 2^{2^t} делится на 2^t).

Докажем по индукции, что при всех натуральных t число $3^{2^t}-1$ делится на 2^{t+2}. При t=1 утверждение очевидно. Пусть оно верно при некотором t. Имеем: $3^{2^{t+1}}-1=(3^{2^t}+1)(3^{2^t}-1)$. Первый множитель делится на 2, второй — на 2^{t+2}. Утверждение доказано.

11-7. *Ответ:* существует. *Решение 1.* Можно сделать пространственный «крест» из 6 «карандашей» — длинных тонких параллелепипедов, примыкающих снаружи к граням единичного куба (куб нужен только для объяснения конструкции). Карандаши лежат на гранях куба симметрично относительно центра куба. Каждая пара параллельных карандашей параллельна одной из осей координат и загораживает вершины другой пары, поэтому из центра куба вершин не видно. Остает-ся перекинуть «мосты» между карандашами и получить мно-гогранник.

Решение 2. (Придумано школьником Ю.Браиловым.) Воз-ьмем две тонких квадратных пластинки и расположим и параллельно. Между ними поместим квадратную рамку тако же размера, повернутую относительно пластинок на 45°. Рам загородит вершины пластинок от наблюдателя в центре симме-рии. В углах рамки перпендикулярно ее плоскости расположи 4 карандаша, которые загородят вершины рамки. При это пластинки загородят концы (вершины) карандашей.

Замечания. 1. Известна следующая задача: *докажите, ч (невыпуклый) многоугольник можно триангулировать* (т разрезать на треугольнички, имеющие либо общую вершин либо общую сторону) *так, чтобы все треугольнички триан-ляции лежали в вершинах исходного многоугольника.* С.Маркел доказал, что пространственный аналог не имеет места. (П-умайте, как построить нетриангулируемый многогранник.)

2. Из любой точки плоскости видна хотя бы одна верши произвольного многоугольника (однако,возможно, что никак сторона не видна полностью). Для многогранника: если е плоскость, разделяющая точку наблюдения и многогранник хотя бы одна вершина видна.

ОТБОР НА ВСЕРОССИЙСКУЮ ОЛИМПИАДУ 1995 ГОДА

9 класс

9-1. Натуральные числа X и Y получаются друг из друга перестановкой цифр. Докажите, что числа $5X$ и $5Y$ имеют одинаковые суммы цифр.

9-2. Треугольники MAB и MA_1B_1 подобны и одинаково ориентированы. Докажите, что прямые AA_1 и BB_1 и описанные окружности треугольников MAB и MA_1B_1 имеют общую точку.

9-3. В круговом турнире по шашкам из n участников ($n \geq 2$) каждый должен сыграть с каждым по одной партии. Каждая партия занимает час. а) Докажите, что турнир всегда можно провести за n часов. б) При каких n турнир можно провести за $n-1$ час?

9-4. На полях шахматной доски стоят несколько ладей. Докажите, что можно так раскрасить ладьи в три цвета, что одноцветные ладьи не будут бить друг друга.

9-5. Пусть

$$\frac{m}{n} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}},$$

причем количество дробных линий в правой части равно 1994 и дробь m/n несократима. Докажите, что $(1/2 + m/n)^2 + 1/n^2 = 5/4$.

Задачи предложили: С. Дориченко (1, 2, 5), В. Аржанцев (3), А. Шаповалов (4).

10 класс

10-1. Из 9 внешне неразличимых монет одна фальшивая — легче остальных. Имеются два экземпляра внешне неразличимых чашечных весов, из которых одни заедают (они чувствуют разницу лишь в том случае, если на одну чашку положить больше монет, чем на другую). За сколько взвешиваний можно наверняка выделить фальшивую монету?

10-2. Пусть A', B', C' — основания высот треугольника ABC, M — произвольная точка. Докажите, что описанные окружности треугольников $AA'M$, $BB'M$, $CC'M$ имеют общую точку, отличную от точки M.

10-3. На доске написаны положительные рациональные числа a и b, $a \neq b$. На каждом шаге к написанным числам добавляют корни из их попарных произведений. Докажите, что после некоторого шага на доске появится иррациональное число.

10-4. На плоскости отметили точки $A_1, A_2, \ldots A_n$ и провели отрезки $b_1, b_2, \ldots b_n$, каждый из которых соединяет какие-то две из отмеченных точек. Назовем отрезки b_i и b_j смежными, если они имеют общий конец. Оказалось, что точки A_i, A_j соединены отрезком тогда и только тогда, когда отрезки b_i и b_j смежные. Докажите, что из каждой точки выходит ровно два отрезка.

10-5. Натуральные числа раскрашены в черный и белый цвет. Известно, что сумма белого и черного — черная, а произведение белого и черного — белое. а) Докажите, что сумма белого и черного — черная, а произведение белого и черного — белое. б) Опишите все возможные варианты раскраски.

Задачи предложили: С.Токарев (1), С.Маркелов (2), В.Сендеров (3), В.Аржанцев (4), П.Филевич (5)

11 класс

11-1. Дано:

$$|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|$$

при любом x. Докажите, что $|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leq 1$.

11-2.* Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O, Z — основание перпендикуляра, опущенного из O на прямую BD. Докажите, что точка O равноудалена от прямых AZ и CZ.

11-3. Ребра бесконечной треугольной решетки раскрашены в два цвета. Докажите, что найдутся две сколь угодно далекие точки, соединенные одноцветным путем.

11-4. Докажите, что для любого тетраэдра $ABCD$ и любой точки O внутри него $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD > 180°$.

11-5. Для каких n существуют такие n-значные числа a и b, что $a \cdot 10^n + b$ делится на $b \cdot 10^n + a$ и $a \neq b$?

11-6. Обозначим $S(n) = 1 + 2^2 + \ldots + n^n$. Докажите, что

$$1/n^n > 1/s(n) + 1/s(n+1) + \ldots$$

при любом $n > 1$.

11-7•. Докажите, что среди 50 человек обязательно найдутся двое с четным числом общих знакомых.

Задачи предложили: В.Сендеров (1), С.Маркелов (2), Г.Кондаков (3,4), П.Филевич (5), А.Грибалко (6), С.Токарев (7)

9 класс

9-1. Обозначим через $p(A)$ сумму цифр натурального числа A. Очевидно, что если при сложении чисел A и B столбиком не происходит переносов в старшие разряды, то $p(A+B)=p(A)+p(B)$ (тогда цифры числа $A+B$ равны суммам соответствующих цифр чисел A и B).

Пусть $X=\overline{a_1a_2...a_k}$ — десятичная запись числа A. Умножим 5 на A столбиком. При сложении переносов происходить не будет, так как старшая цифра числа $5a_i$ не превосходит 4 $(5\cdot 9=45)$, а младшая цифра следующего числа — 0 или 5. Значит, $p(X)=$ $=p(5a_1)+...+p(5a_k)$. Отсюда вытекает утверждение задачи.

9-2. Заметим, что дуги, стягиваемые одноименными сторонами треугольников, имеют равные угловые размеры. Достаточно доказать, что точка пересечения окружностей (O) лежит на прямой AA_1. Рассмотрим два случая. 1) Отрезок AA_1 лежит внутри большей окружности. Тогда углы MOA и MOA_1 направлены в одну сторону и равны (поскольку опираются на равные дуги). Поэтому OA и OA_1 лежат на одной прямой. 2) Отрезок AA_1 пересекает большую окружность. Тогда углы MOA и MOA_1 дежат по разные стороны от OM и в сумме дают 180° (так как опираются на дополняющие дуги). Поэтому OA и OA_1 лежат на одной прямой.

9-3. а) Представим себе людей сидящими в вершинах правильного n-угольника. У правильного n-угольника есть n осей симметрии. Пусть в k-м туре каждый играет с симметричным ему относительно k-й оси (участники, через которых проходит ось, не играют). Утверждение задачи следует теперь из того, что для любых двух вершин A и B правильного n-угольника существвует ровно одна осевая симметрия, переводящая A в B.

б) *Ответ:* при четном n. Если n нечетно, то нужно провести $\frac{n(n-1)}{2}$ партий. За один час можно провести не больше $\frac{n-1}{2}$ партий. Значит, понадобится не меньше n часов.

Пусть n четно. Расположим людей в вершинах правильного $(n-1)$-угольника. Одному не хватит места — посадим его в центр. Каждая из $n-1$ осей симметрии проходит ровно через одну вершину. Шахматист, сидящий в этой вершине играет с сидящим в центре.

9-4. Упорядочим ладьи на шахматной доске как буквы в тексте: слева направо и сверху вниз. Первую ладью красим в любой цвет, а очередную ладью (L) красим так: если сверху или слева есть бьющие ее ладьи (их не больше двух), то красим L в отличный от них цвет. Тогда все бьющие друг друга ладьи будут покрашены в разные цвета.

9-5. Рассмотрим несократимую дробь $\frac{m_k}{n_k}$, для которой количество дробных линий равно k. Перепишем исходное соотношение в виде $m^2 + mn + 1 = n^2$. Докажем более общее утверждение: для любого натурального k, $m_k^2 + m_k n_k + (-1)^k = n_k^2$. Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 1$ имеем: $\frac{m_1}{n_1} = 1$. Следовательно, $m_1 = n_1 = 1$, утверждение верно. Пусть оно доказано при некотором k. Легко видеть, что

$$\frac{m_{k+1}}{n_{k+1}} = \frac{1}{1+\frac{m_k}{n_k}} = \frac{n_k}{m_k + n_k}.$$

Дробь в правой части несократима (поскольку m_k и n_k взаимно просты) Значит, $m_{k+1} = n_k$, $n_{k+1} = m_k + n_k$. Подставляя эти выражения в доказываемую формулу, получим шаг индукции.

Замечание. m_k и n_k — числа Фибоначчи.

10 класс

10-1. *Ответ:* за 3 взвешивания. Известно, что имея верные весы, мы можем за 1 взвешивание найти более легкую фальшивую монету среди 3 настоящих. Занумеруем монеты от 1 до 9.

I. Сравним на первых весах кучки из монет 1,2,3,4 и 5,6,7,8. Если весы не в равновесии, то мы нашли верные весы. Зная, какие весы верные, мы можем определить фальшивую монету за два взвешивания.

Если весы в равновесии, то сравним на вторых весах кучки из монет $1-3$ и $5-7$.

Если весы не в равновесии, то мы нашли верные весы и 3 монеты, среди которых есть фальшивая. За одно взвешивание мы определим эту монету.

Если весы в равновесии, то сравним на вторых весах кучки из монет 1, 2, 3 и 5, 6, 7. Если весы в равновесии, то возможны варианты: первые весы верные и 9-я монета фальшивая; вторые весы верные и фальшивая среди 4, 8, 9.

Сравним на вторых весах 4-ю и 8-ю. Если весы не в равновесии, то мы нашли фальшивую монету. Иначе возможны варианты: вторые весы верные — тогда 4-я и 8-я настоящие, а 9-я фальшивая; первые весы верные, тогда фальшивая 9-я.

Итак, в любом случае фальшивая — 9-я. Утверждение доказано.

II. **Докажем**, что фальшивую монету нельзя найти за два взвешивания. Пусть мы сделали два взвешивания. Можно считать, что каждый раз мы клали на левую и правую чашки весов монет поровну (иначе взвешивание бессмысленно). Пусть оба раза весы были в равновесии. Если хотя бы один раз мы клали на весы меньше 8 монет, то любая из оставшихся монет может быть фальшивой.

Значит, оба раза надо класть по 4 монеты на каждую чашку. Пусть одни из весов не в равновесии. Тогда любая из 4 монет на более легкой чашке могла быть фальшивой. Противоречие. Утверждение доказано.

Замечание. Интересно, что, определив фальшивую монету, мы можем не узнать, какие весы верные.

10-2. *Идея решения.* Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, тогда искомая точка лежит на прямой MH.

Нетрудно видеть, что $AH \cdot HA' = BH \cdot HB' = CH \cdot HC'$ (первое из этих равенств можно получить, например, из подобия треугольников AHB' и BHA'). Обозначим это число через k. Выберем на луче MH точку M' так, чтобы H лежала между M и M' и $MH \cdot HM' = k$. Докажем, что точка M' лежит на каждой из окружностей. Достаточно доказать, что точки A, A', M и M' лежат на одной окружности, но это равносильно равенству $AH \cdot HA' = MH \cdot HM'$. Утверждение доказано.

Замечание. Есть более общий факт. Пусть три окружности попарно пересекаются. Рассмотрим три их общие хорды и произвольную точку плоскости. Тогда три окружности, проходящие через концы одной из хорд и эту точку, имеют общую точку.

10-3. Рассмотрим «канонические разложения» чисел на простые множители (делители) $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$, $b = p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}$ где все степени, целые не равные нулю. Существует такое i, что $\alpha_i \neq \beta_i$. Рассмотрим числа $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a\sqrt{ab}}$ и т.д. Тогда на n-м шаге получим $c_n = a^{1-1/2^n} b^{1/2^n} = a(b/a)^{1/2^n}$. При достаточно большом n степень любого простого числа в разложении c_n не будет целой, а это означает, что c_n иррационально.

10-4. (Решние школьника В.Крюкова.) Обозначим количество отрезков, выходящих из точки A_i, через x_i. Тогда $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2n$ (сумма в левой части — это количество концов отрезков, т.е. удвоенное количество отрезков). Пусть y_i — количество отрезков, смежных с b_i. Если b_i соединяет A_t и A_s, то $y_i = x_t + x_s - 2$. Рассмотрим сумму $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ и заменим y_i

на $x_i + x_j - 2$. Нетрудно видеть, что x_i входит в сумму с коэффициентом x_i. Значит, $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 2n$. С другой стороны, b_j смежно с b_i тогда и только тогда, когда A_i и A_j соединены отрезком, значит, $y_i = x_i$. Отсюда $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 4n$. Поэтому среднее арифметическое и среднее квадратическое равны 2. Теперь утверждение задачи следует из леммы:

Лемма. Среднее арифметическое нескольких чисел не превосходит среднего квадратического, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда числа равны.

Лемма доказывается возведением обеих частей в квадрат и раскрытием скобок, либо по индукции.

10-5. *Ответ:* белые числа — все кратные некоторого $k > 1$, и только они.

а) Пусть даны два белых числа — m и n. Нужно доказать, что mn — белое. Пусть k — какое-нибудь черное число. Тогда $m+k$ — черное. Значит, $mn + kn = (m+k)n$ — белое. kn — белое. Если mn — черное, то $mn+kn$ — черное. Противоречие. Утверждение доказано.

б) Пусть k — наименьшее из белых чисел. Из условия и пункта а) следует, что все кратные k также белые. Докажем, что других белых нет. Пусть n — белое. Разделим n с остатком на k, т.е. представим n в виде $qk + r$, где $0 \le r < k$. Если $r \ne 0$, то r — черное, поскольку k — наименьшее из белых чисел. По доказанному, qk — белое. Значит, $qk + r$ — черное. Противоречие. Значит, $r = 0$ и n делится на k.

Если покрасить все числа, кратные некоторому $k > 1$, в белый цвет, а все остальные — в черный, то условия будут выполнены.

11 класс

11-1. Воспользуемся тем, что $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$ при $x \to 0$. Разделим обе части неравенства на $|x|$ и перейдем к пределу.

11-2. Сделаем симметрию четырехугольника относительно диаметра OZ. A_1, B_1, C_1, D_1 — точки, симметричные соответствующим вершинам. Точки $M = AB \cap A_1B_1$ и $N = CB \cap C_1B_1$ лежат на оси симметрии. Точки B, D, B_1, D_1 лежат на одной прямой. Обозначим $P = AD \cap B_1A_1$, $Q = B_1N \cap CD$, P_1, Q_1 — им симметричные.

Воспользуемся теоремой Брианшона, которая гласит, что в описанном шестиугольнике (возможно, невыпуклом) три диагонали, соединяющие вершины через две, пересекаются в одной точке.

Рассмотрим шестиугольник $QDPMBN$. По теореме Брианшона диагонали NP, MQ, BD пересекаются в одной точке. Заметим, что DZ — высота в треугольнике NB_1M. В силу известного свойства точек на высоте треугольника углы QZD и PZD равны. Но это равносильно тому, что точки P, Z, Q_1 лежат на одной прямой.

Применим теорему Брианшона к шестиугольнику $PA_1D_1Q_1CD$. Получим, что P_1Q, D_1D, A_1C пересекаются в одной точке. Но PQ_1 и D_1D пересекаются в точке Z (из-за равенства соответствующих углов), поэтому A_1C проходит через Z. Из этого вытекает утверждение задачи.

11-3. Достаточно доказать, что граница компоненты связности одного цвета — связная область другого цвета.

В самом деле, перекрасим связную область в цвет ее границы, получим связную область большего размера. Рассмотрим ее границу. Опять перекрасим область в цвет границы. Рано или поздно диаметр одноцветной области будет достаточно большим.

Для доказательства перейдем к новому графу (известный прием в теории графов): в качестве новых вершин возьмем середины старых ребер и соединим две новые вершины ребром, если соответствующие им старые ребра имели общую вершину. У нового графа будут покрашены вершины. Докажем, что у нового графа компоненты связности одного цвета — связная область другого цвета.

Заметим, что у нового графа из каждой вершины выходит 10 ребер. Занумеруем ребра одной вершины по часовой стрелке от 1 до 10. Тогда вершины, занумерованные соседними числами (1 и 10 тоже соседи), соединены ребром.

Возьмем компоненту связности синего цвета и будем обходить ее по правилу правой руки, отмечая в каждой синей точке все красные точки, в которые мы бы пошли, если бы они были синими. По предыдущему замечанию отмеченные точки образуют связную область.

11-4. Проведем через точки A, B и O плоскость. Пусть она пересекла отрезок CD в точке K. Очевидно, что угол COK меньше угла COD. Проведем плоскость через точки C, K и O. Пусть она пересекла AB в точке L. Сумма углов LOB, BOC и COK меньше суммы углов AOB, BOC и COD, но она больше $180°$, так как O лежит на отрезке LK.

11-5. *Ответ:* $n = 6m - 3$, $m \in N$. Пусть $a \cdot 10^n + b = k(b \cdot 10^n + a)$, тогда $a/b = (k \cdot 10^n - 1)/(10^n - k)$. Так как $k \cdot 10^n - 1 > 10^n > a$, то дробь справа сократима. Из равенства $(k \cdot 10^n - 1) - k(10^n - k) = k^2 - 1$ следует, что общий делитель чисел $(k \cdot 10^n - 1)$ и $(10^n - k)$ делит и число $k^2 - 1$. Поскольку $a = (k \cdot 10^n - 1)/d < 10^n$, то $d \geq k + 1$. Исходя из этого, проверьте, что при всех k, отличных от 6 $(2 \le k \le 9)$, числа $(k \cdot 10^n - 1)$ и $(10^n - k)$ взаимно просты, т.е. наша дробь несократима.

Пусть $k = 6$, тогда $k^2 - 1 = 35$. Общим делителем $(k \cdot 10^n - 1)$ и $(10^n - k)$ может быть только 7. Отсюда $n = 6m - 3$. Очевидно, числа $a = (6 \cdot 10^n - 1)/7$ и $b = (10^n - 6)/7$ являются целыми n-значными числами, т.е. удовлетворяют условию задачи.

Замечание. $a = 857\,142\,857\,142 \ldots 857$ ($6m-3$ цифр), $b = 142\,857\,142\,857 \ldots 142$ ($6m-3$ цифр). Число 142857 встречается во многих задачах — это период дроби $1/7$, т.е. $1/7 = 0,(142857)$.

11-6. Докажем по индукции неравенство

$$(n+1)^{n+1}/n^n > s(n)/s(n-1). \qquad (1)$$

Пусть оно верно при некотором n. Поскольку для положительных a, b, c, d из $a/b > c/d$ следует $a/b > (a+c)/(b+d)$, то

$$(n+1)^{n+1}/n^n > s(n+1)/s(n).$$

Из монотонности последовательности $(1 + 1/n)^n$ следует, что

$$(n+2)^{n+2}/(n+1)^{n+1} > (n+1)^{n+1}/n^n.$$

Это завершает индуктивный переход.

Докажем теперь неравенство

$$1/n^n > 1/s(n) + 1/(n+1)^{n+1}. \qquad (2)$$

Из него последовательным применением получим искомое. Перепишем (1) так: $s(n-1)/(n^n s(n)) > 1/(n+1)^{n+1}$. Подставляя $s(n-1) = s(n) - n^n - n$ и группируя члены, получим (2).

11-7. Допустим, что в некоторой компании у любых двух людей нечетное число общих знакомых.

Лемма. В такой компании у каждого четное число знакомых.

Доказательство. Рассмотрим множество знакомых произвольного человека A (без него самого). В этой компании у каждого нечетное число знакомых (поскольку нечетно число общих знакомых с A), значит, число людей в компании четно.

Возмем произвольного человека A и посчитаем сумму чисел общих знакомых у A и каждого из остальных 49. Сумма 49 нечетных слагаемых нечетна.

Теперь посчитаем эту сумму другим способом. Для каждого знакомого A посчитаем, сколько раз он входил в сумму, и сложим эти числа. Знакомых A четное число (по лемме), каждый входил в сумму нечетное число раз, так как знаком с нечетным числом людей, отличных от A (по лемме); значит, сумма четна. Противоречие.

МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ 60 ЛЕТ СПУСТЯ

Печатается по изданию:
Приложение к журналу "Квант" 6/95

Формат 84х108 1/32. Гарнитура литературная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,72.
Тираж 300 экз.
Бесплатно.

Отпечатано в ИНП РАН
117418, Москва, Нахимовский проспект, 47.

С. Агеев 98-10-3
А. Акопян 04-8-5
И. Акулич 93-8-6, 01-8-2
А. Анджанс 93-11-3
С. Анисов 98-10-1[&], 98-10-4[&], 98-11-5
Р. Анно 00-10-1[&]
Б. Бегун 96-10-4
А. Белов 96-9-6
А. Блинков 02-8-2, 04-8-1[&], 04-10-2, 05-9-1
И. Богданов 02-8-5, 03-11-6
П. Бородин 04-11-2, 04-11-4
95-6-1 95-7-2 95-8-4 → *Д. Ботин* 93-8-4, 94-8-5
В. Бугаенко 96-10-1[&]
А. Буфетов 99-10-5, 99-11-4[&]
А. Бучин 02-8-4[&]
Н. Васильев 94-11-3, 94-11-6, 94-9-3
А. Владимиров 93-10-4[&]
М. Волчкевич 97-8-5, 98-8-11
95-11-1 95-11-2 *А. Галочкин* 93-9-3, 94-9-5, 95-8-2, 95-9-1, 96-9-1, 96-9-2, 04-11-3
Г. Гальперин 93-9-5, 94-11-4, 97-11-5[&] 98-11-3, 00-10-3, 01-9-5, 02-10-6, 02-9-6
С. Гашков 93-10-1, 93-10-2
А. Герко 99-9-6
Т. Голенищева-Кутузова 04-8-1[&]
А. Горбачв 02-8-6, 02-9-5
М. Горелов 00-8-6
Е. Горский 05-10-2
А. Грибалко 95-10-5
П. Грозман 01-10-6[&]
В. Гуровиц 01-11-6, 02-8-1
С. Гусейн -Заде 93-11-4[&]
Д. Дерягин 99-10-6[&]
В. Дольников 97-9-2
В. Доценко 00-10-5[&], 01-8-3[&]
М. Евдокимов 97-10-3, 97-11-3, 99-9-5, 00-10-2
А. Егоров 95-9-4, 96-10-1[&]
Л. Емельянов 02-11-5
В. Жгун 02-9-3
Р. Женодаров 00-8-4
С. Зайцев 05-8-2
А. Заславский 97-11-1, 99-9-3, 99-10-2[&], 00-11-3, 01-11-3, 01-9-3, 02-10-1, 02-11-1, 02-8-3, 03-10-2, 03-10-4, 03-11-3, 03-11-5[&], 04-10-5, 05-8-3, 05-9-3, 05-9-6, 05-10-1
Л. Звавич 03-8-1[&]
С. Злобин 99-10-3, 00-11-1, 00-8-1, 02-10-2
А. Иванищук 02-8-4[&]
К. Игнатьев 94-9-6
Р. Измайлов 93-10-4[&]
И. Изместьев 99-9-2
Д. Калинин 03-9-2
А. Канель 01-10-1, 01-11-1, 01-11-5
А. Канель-Белов 99-11-7, 99-9-1, 93-11-1, 93-11-2, 93-11-5, 93-8-3, 95-10-6, 97-10-1, 97-10-6, 98-8-2, 98-10-4[&], 98-10-6[&], 99-11-4[&], 00-11-6, 04-9-3, 04-9-4, 05-9-5, 05-10-5
Т. Караваева 03-8-4
В. Кириченко 00-10-1[&]
В. Клепцын 01-10-2, 01-9-4, 03-10-1
А. Ковальджи 94-8-2, 94-8-4, 94-10-1, 94-11-1[&], 97-9-4, 98-8-7, 98-8-8
В. Ковальджи 95-8-1, 95-8-5
П. Кожевников 99-10-2[&]
Г. Кондаков 93-10-3, 94-11-1[&], 96-11-6
Н. Константинов 96-10-5
С. Конягин 93-9-2, 05-8-6, 05-10-6

[&] в соавторстве.

О. Косухин 04-11-6, 05-11-5, 05-11-6
О. Крыжановский 94-10-6, 94-8-6
Р. Кузнец 00-9-1
Б. Кукушкин 93-8-1, 96-11-2
Е. Куликов 05-8-4&
А. Кустарь 04-8-2
В. Латышев 98-10-6&
М. Макаров 04-8-3
С. Маркелов 94-8-3, 95-10-1, 95-10-2, 95-10-3, 95-8-3, 95-9-2, 96-11-5, 04-10-3, 05-8-5, 05-9-4
95-7-6
95-11-7&
И. Межиров 03-10-5&
А. Митягин 01-9-1
И. Нагель 94-9-4
Е. Осьмова 99-9-4
М. Панов 00-9-3
Д. Пермяков 05-11-3&
О. Подлипский 03-11-5&
В. Произволов 94-10-5, 95-8-6, 96-10-3, 96-11-3, 96-8-2, 96-8-4, 97-11-4, 97-8-1, 97-8-3, 97-9-3, 98-10-2, 98-11-1, 98-8-1, 98-8-12, 98-10-1&, 99-10-4, 99-8-2, 99-8-3&, 99-8-5, 99-11-2&,
П. Пушкарь 03-8-3
В. Сендеров 96-10-6, 96-11-4, 97-9-6, 98-11-4&, 99-8-3&, 99-11-1, 99-11-2&, 99-11-6&, 01-10-3, 02-9-2, 02-9-4, 03-11-7
95-11-6
И. Сергеев 04-11-1, 04-11-5, 05-11-2
А. Скопенков 98-8-10, 05-11-3&
М. Скопенков 04-10-1
В. Слитинский 93-8-2
А. Смоляков 97-11-5&
М. Смуров 97-11-6, 98-8-3
А. Спивак 93-8-5, 96-8-5, 00-9-6&, 02-11-2&, 03-10-5&
95-7-5
Д. Терешин 93-10-5, 99-11-3
С. Токарев 93-9-4, 96-8-6, 05-8-4&
А. Толпыго 95-9-6, 97-9-1, 99-8-4, 01-9-6
А. Устинов 05-11-4
В. Уфнаровский 94-10-3
Р. Федоров 96-8-1, 03-8-5, 03-9-1
К. Фельдман 97-10-4
П. Филевич 96-9-4
Б. Френкин 97-10-5, 97-9-5, 98-8-9, 99-8-6, 99-10-6&, 02-10-5, 02-11-6, 03-10-3, 03-11-2, 04-8-4, 04-9-1
А. Хачатурян 01-8-1, 02-11-2&, 03-8-2, 03-9-4, 05-10-3
А. Чеботарев 03-8-1&, 03-8-6, 03-9-3, 03-10-6
Ю. Чеканов 94-9-2, 95-9-3
Г. Челноков 99-11-6&, 03-11-4
Н. Чернятьев 99-11-5
Г. Шабат 94-10-2
А. Шапиро 94-9-1
А. Шаповалов 95-10-4, 95-9-5, 96-10-2, 97-8-4, 97-8-6, 00-8-3, 00-8-5, 00-9-4, 00-9-6&, 00-10-5&, 00-10-6, 00-11-4, 01-10-5, 01-10-6&, 02-10-4, 02-11-3, 02-11-4, 05-10-4
Д. Шаповалов 01-10-6&
И. Шарыгин 93-10-6, 93-11-6, 93-9-1, 93-9-6, 94-10-4, 96-8-3, 96-9-3, 96-9-5, 00-9-5, 03-9-5
А. Шень 98-10-5, 01-8-3&
А. Шестаков 00-9-2
С. Шестаков 02-10-3
А. Эвнин 98-11-4&
И. Ященко 93-11-4&, 94-8-1, 97-8-2, 00-8-2, 04-8-1&, 04-9-2
S. Wolfram 98-11-2
фольклор, формулировка — А. Шаповалов 02-9-1
по мотивам Т. Голенищевой-Кутузовой и И. Ященко 05-11-1